ऐच्छिक गणित

कक्षा १०

नेपाल सरकार
शिक्षा, विज्ञान तथा प्रविधि मन्त्रालय
पाठ्यक्रम विकास केन्द्र
सानोठिमी, भक्तपुर

प्रकाशक

नेपाल सरकार

शिक्षा, विज्ञान तथा प्रविधि मन्त्रालय

पाठ्यक्रम विकास केन्द्र

सानोठिमी, भक्तपुर

प्रथम संस्करण : वि.सं. २०८२

हाम्रो भनाइ

शिक्षालाई उद्देश्यमूलक, व्यावहारिक, समसामयिक र रोजगारमूलक बनाउन विभिन्न समयमा पाठ्यक्रम, पाठ्यपुस्तक विकास तथा परिमार्जन कार्यलाई निरन्तरता दिइँदै आएको छ । विद्यार्थीमा ज्ञानको खोजी गरी सिकाइ र वास्तविक जीवनबिच सम्बन्ध स्थापित गर्ने, सिद्धान्त र व्यवहारको समन्वय गर्ने, स्वपरावर्तित हुँदै ज्ञान, सिप र क्षमतालाई अद्यावधिक गर्ने सक्षमताको विकास हुनु आवश्यक छ। विद्यार्थीमा अधिकार, स्वतन्त्रता र समानताको प्रवर्धन गर्ने, स्वस्थ जीवनको अभ्यास गर्ने, तार्किक विश्लेषण गरी निर्णय गर्ने, वैज्ञानिक विश्लेषणका आधारमा व्यक्ति, समाज र राष्ट्रको दिगो विकासमा सरिक हुने सक्षमताको विकास पनि शिक्षाले गर्नुपर्छ। विद्यार्थीमा नैतिक आचरण प्रदर्शन गर्ने, सामाजिक सद्भावप्रति संवेदनशील हुने, पर्यावरणीय सन्तुलनप्रति संवेदनशील हुने, द्वन्द्व व्यवस्थापन गर्दै दिगो शान्तिका लागि प्रतिबद्ध रहने सक्षमताको विकास पनि माध्यमिक तहको शिक्षाबाट अपेक्षित छन् । यस तहको शिक्षाबाट आधुनिक ज्ञान, सिप, सूचना तथा सञ्चार प्रविधिको प्रयोग गर्ने, स्वावलम्बी र व्यवसायमुखी सिपको अभ्यास गर्ने, राष्ट्र, राष्ट्रियता र राष्ट्रिय आदर्शको सम्मान गर्ने, समाज स्वीकार्य आचरण र कार्य संस्कृतिको अवलम्बन गर्ने, सहिष्णु भाव राख्ने सक्षमता भएको नागरिक तयार गर्ने अपेक्षा रहेको छ । त्यस्तै, सिर्जनशील, कल्पनाशील, उद्यमशील एवम् उच्च सोच र आदर्शमा आधारित व्यवहार गर्ने, समसामयिक चुनौतीहरूको सफल व्यवस्थापन गर्नेलगायतका विशेषताले युक्त स्वावलम्बी, देशभक्त, परिवर्तनमुखी, चिन्तनशील एवम् समावेशी समाज निर्माणमा योगदान गर्न सक्ने सक्षमतासहितको नागरिक तयार गर्नु माध्यमिक शिक्षाको लक्ष्य रहेको छ । यही लक्ष्य पूर्तिका लागि विद्यालय शिक्षाको राष्ट्रिय पाठ्यक्रम प्रारूप, २०७६ को मार्गदर्शनअनुरूप विकास भएको माध्यमिक शिक्षा (कक्षा ९-१०) को ऐच्छिक गणित विषयको पाठ्यक्रमअनुसार कक्षा १० को ऐच्छिक गणित विषयको यो नमुना पाठ्यपुस्तक तयार पारिएको हो ।

यस पाठ्यपुस्तकको लेखन डा. विनोदप्रसाद पन्त, डा. एकराज पण्डित, श्री निर्मला गौतम, श्री शक्तिप्रसाद आचार्य र श्री जगन्नाथ अधिकारीबाट भएको हो। पाठ्यपुस्तकलाई यस रूपमा ल्याउने कार्यमा यस केन्द्रका महानिर्देशक श्री युवराज पौडेल, प्रा. डा. हरिप्रसाद उपाध्याय, श्री मैंया खड्का, श्री ज्ञानेन्द्र वन, श्री नवीन पौडेल, श्री अनुपमा शर्मा र श्री सत्यनारायण महर्जन, श्री नरहरि आचार्य, श्री रामबहादुर बुढाथोकी, श्री सरोजभक्त आचार्य, श्री रामहरि श्रेष्ठ, श्री इन्दिरा पाण्डे र श्री गणेश पाठकलगायत सरोकारवालाको विशेष योगदान रहेको छ। यसको भाषा सम्पादन श्री पुरुषोत्तम घिमिरे एवम् श्री कुमार घिमिरे र लेआउट डिजाइन श्री जयराम कुइँकेलबाट भएको हो । यसको विकासमा संलग्न सम्पूर्णप्रति केन्द्र हार्दिक कृतज्ञता प्रकट गर्छ ।

पाठ्यपुस्तकलाई सिकाइ सहजीकरणको महत्त्वपूर्ण साधनका रूपमा लिइन्छ। यसबाट विद्यार्थीले पाठ्यक्रमद्वारा लक्षित सक्षमता हासिल गर्न मदत पुग्ने अपेक्षा गरिएको छ। यस पाठ्यपुस्तकलाई सकेसम्म क्रियाकलापमुखी, अनुभवकेन्द्रित, उद्देश्यमूलक र रुचिकर बनाउने प्रयत्न गरिएको छ। सिकाइ र विद्यार्थीको जीवन्त अनुभवबिच तादात्म्य कायम गर्दै यसको सहज प्रयोग गर्न शिक्षकले सहजकर्ता, उत्प्रेरक, प्रवर्धक र खोजकर्ताका रूपमा भूमिकाको अपेक्षा गरिएको छ । पाठ्यपुस्तकलाई अझै परिष्कृत पार्नका लागि शिक्षक, विद्यार्थी, अभिभावक, बुद्धिजीवी एवम् सम्पूर्ण पाठकहरूको समेत महत्त्वपूर्ण भूमिका रहने हुँदा सम्बद्ध सबैको रचनात्मक सुझावका लागि पाठ्यक्रम विकास केन्द्र हार्दिक अनुरोध गर्छ ।

नेपाल सरकार
शिक्षा, विज्ञान तथा प्रविधि मन्त्रालय
पाठ्यक्रम विकास केन्द्र

वि.सं. २०८२

विषयसूची

पाठ 1

फलन (Function)

1.1 परिचय (Introduction)

दुई समूहमध्ये पहिलो समूहका प्रत्येक सदस्यले दोस्रो समूहको कुनै एउटा सदस्यसँग मात्र सम्बन्ध देखाउने विशेष प्रकारको सम्बन्धलाई फलन भनिन्छ। परापूर्वकालदेखि अनौपचारिक रूपमा सुरु भएको फलनको अवधारणा सत्रौँ शताब्दीमा आएर क्यालकुलसको विकाससँगै औपचारिक रूपमा विकास भएको मानिन्छ । मुख्यतः सन् 1673 मा Gottfried Wilhelm Leibniz ले फलन (Function) शब्दको प्रयोग गरेका थिए भने सन् 1730 मा Leonhard Euller ले सर्वप्रथम फलनलाई $y = f(x)$ सङ्केतका रूपमा प्रयोग गरेका थिए । फलनको प्रयोग हाम्रो जीवन व्यवहारका धेरै क्षेत्रका साथै गणित, विज्ञान, वाणिज्य, अर्थशास्त्र, इन्जिनियरिङ आदि क्षेत्रमा प्रयोग गरिन्छ ।

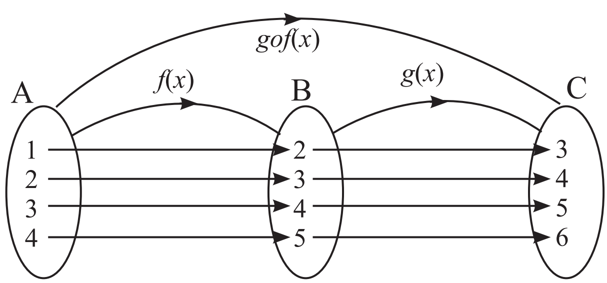
Gottfried Wilhelm Leibniz

Leonhard Euller

1.2 संयुक्त फलन (Composite Function)

क्रियाकलाप 1

तलको मिलानचित्र अवलोकन गरी दिइएका प्रश्नका आधारमा छलफल गरेर निष्कर्ष निकाल्नुहोस् :



(क) समूह A का प्रत्येक सदस्यको समूह B का कुन कुन सदस्यहरूसँग सम्बन्ध देखाइएको छ ?

(ख) समूह B का प्रत्येक सदस्यको प्रतिबिम्बहरू के के छन् ?

(ग) के समूह A को सदस्य 1 ले समूह C को कुनै सदस्यसँग सम्बन्ध देखाइएको छ ?

(घ) के समूह A र समूह C बिच फलन परिभाषित गर्न सकिन्छ ?

उल्लिखित मिलानचित्रमा समूहहरू $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$ र $C = \{3, 4, 5, 6\}$ छन् । यहाँ एउटा फलन $f(x)$, $f: A \rightarrow B = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$ का रूपमा र अर्को फलन $g(x)$, $g: B \rightarrow C = \{(2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6)\}$ का रूपमा परिभाषित छ । त्यस्तै अर्को सम्बन्ध $A \rightarrow C = \{(1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6)\}$ पनि फलनका रूपमा परिभाषित भयो भने यस्तो

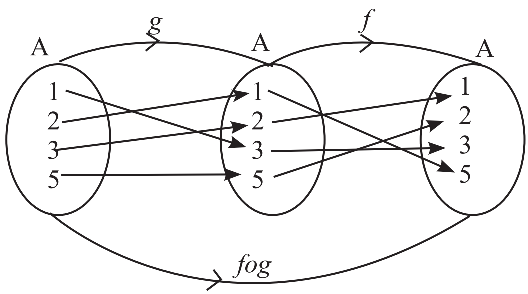
फलन संयुक्त फलन हो । यस अवस्थाको संयुक्त फलनलाई gof: A→C वा gof वा $gof(x)$ वा $gf(x)$ वा gf मात्रले पनि जनाइन्छ । साथै यसलाई g र f को संयुक्त फलन भनेर पढिन्छ ।

यदि फलनहरू f: A→B का रूपमा र g: B→C का रूपमा परिभाषित छन् र सम्बन्ध A→C पनि फलनका रूपमा परिभाषित हुन्छ भने फलन A→C लाई f र g को संयुक्त फलन भनिन्छ। यसलाई gof: A→C वा $gof(x)$ वा gof वा $gf(x)$ वा gf का रूपमा जनाइन्छ । फलनहरू g: A→B र f: B→C सम्पूर्ण फलन (onto function) परिभाषित नभएमा फलन A→C संयुक्त फलन परिभाषित हुँदैन ।

विचारणीय प्रश्न : यदि फलनहरू g: A→B र f: B→C सम्पूर्ण फलन परिभाषित नभएमा संयुक्त फलन fg: A→C परिभाषित हुँदैन किन होला, छलफल गर्नुहोस् ।

उदाहरण 1

दिइएको मिलानचित्रमा फलन g:A→A र f: A→A परिभाषित छ । यसका आधारमा तलका प्रश्नहरूको उत्तर दिनुहोस् :



(क) फलन g:A→A लाई क्रमजोडाका रूपमा लेख्नुहोस् ।

(ख) फलन f:A→A लाई क्रमजोडाका रूपमा लेख्नुहोस् ।

(ग) दिइएको मिलानचित्रबाट $fog(1)$, $fog(2)$, $fog(3)$ र $fog(5)$ का मान निकाल्नुहोस् ।

(घ) संयुक्त फलन fog लाई क्रमजोडाका रूपमा लेख्नुहोस् ।

(ङ) संयुक्त फलन gof मिलानचित्रमा देखाई $gof(1)$, $gof(2)$, $gof(3)$ र $gof(5)$ का मान निकाल्नुहोस् ।

(च) संयुक्त फलन gof लाई क्रमजोडाका रूपमा लेख्नुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

(क) फलन g: A→A = {(1, 3), (2, 1), (3, 2), (5, 5)}

(ख) फलन f: A→A = {(1, 5), (2, 1), (3, 3), (5, 2)}

(ग) $fog(1) = f(g(1)) = f(3) = 3$

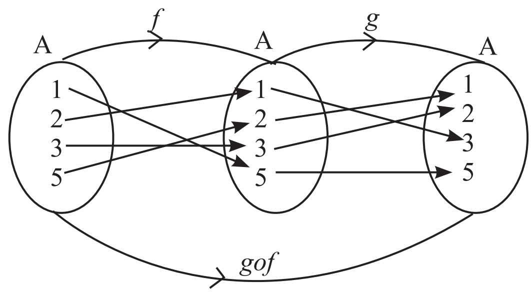
$fog(2) = f(g(2)) = f(1) = 5$

$fog(3) = f(g(3)) = f(2) = 1$

$fog(5) = f(g(5)) = f(5) = 2$

(घ) संयुक्त फलन $fog = \{(1, 3), (2, 5), (3, 1), (5, 2)\}$

(ङ) संयुक्त फलन gof का लागि मिलानचित्र तपसिलबमोजिम हुन्छ :



अब, $gof(1) = g(f(1)) = g(5) = 5$

$gof(2) = g(f(2)) = g(1) = 3$

$gof(3) = g(f(3)) = g(3) = 2$

$gof(5) = g(f(5)) = g(2) = 1$

(च) तसर्थ, संयुक्त फलन $gof = \{(1, 5), (2, 3), (3, 2), (5, 1)\}$

उदाहरण 2

यदि $f(x) = 3x$ र $g(x) = 2x + 1$ भए तलका संयुक्त फलनहरूको मान पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) $gf(x)$ (ख) $fg(x)$ (ग) $ff(x)$ (घ) $fg(1)$

समाधान : यहाँ

$f(x) = 3x, g(x) = 2x + 1$

(क) $gf(x) = g(f(x)) = g(3x) = 2(3x) + 1 = 6x + 1$

(ख) $fg(x) = f(g(x)) = f(2x + 1) = 3(2x + 1) = 6x + 3$

(ग) $ff(x)) = f(f(x)) = f(3x) = 3(3x) = 9x$

(घ) $f(g(1)) = 6 \times 1 + 3 \; [\because \; fg(x) = 6x + 3)] = 6 + 3 = 9$

उदाहरण 3

यदि $f(x) = x^2 + 2$, $g(x) = x + 14$ र $f(a) = g(a)$ भए a को मान निकाल्नुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

$f(x) = x^2 + 2$, $g(x) = x + 14$ र $f(a) = g(a)$

अब, $f(a) = g(a)$

अथवा, $a^2 + 2 = a + 14$

अथवा, $a^2 - a - 12 = 0$

अथवा, $a^2 - 4a + 3a - 12 = 0$

अथवा, $a(a - 4) + 3(a - 4) = 0$

अथवा, $(a - 4)(a + 3) = 0$

अत: $a = 4$ वा -3

उदाहरण 4

यदि $f(x) = kx + 3$, $g(x) = 2x - 4$ र $gf(2) = 34$ भए k को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

$f(x) = kx + 3$, $g(x) = 2x - 4$ र $gf(2) = 34$

अब, $gf(x) = g(f(x)) = g(kx + 3) = 2(kx + 3) - 4 = 2kx + 6 - 4 = 2kx + 2$

फेरि, $g(f(2)) = 34$

अथवा, $2k \times 2 + 2 = 34$

अथवा, $4k + 2 = 34$

अथवा, $4k = 32$

अत: $k = 8$

उदाहरण 5

यदि $f(x) = 2x + 5$ र $gf(x) = 18x + 41$ भए फलन $g(x)$ पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ

$gf(x) = 18x + 41$

अथवा, $g(2x + 5) = 18x + 41$

अथवा, $g(2x + 5) = 9(2x + 5 - 5) + 41$

अथवा, $g(2x + 5) = 9(2x + 5) - 45 + 41$

अथवा, $g(2x + 5) = 9(2x + 5) - 4$

अत: $g(x) = 9x - 4$

अर्को तरिका

$f(x) = 2x + 5$ र $gf(x) = 18x + 41$

अब, $gf(x) = 18x + 41$

अथवा, $g(f(x)) = 18x + 41$

अथवा, $g(2x + 5) = 18x + 41$

मानौं, $a = 2x + 5$

अथवा, $a - 5 = 2x$

अत: $x = \frac{a - 5}{2}$

अथवा, $g(a) = 18\left(\frac{a-5}{2}\right) + 41$

अथवा, $g(a) = 9a - 45 + 41$

अथवा, $g(a) = 9a - 4$

अत: $g(x) = 9x - 4$

अभ्यास 1.1

1. दिइएका प्रश्नहरूको उपयुक्त विकल्पमा ठिक चिह्न (✓) लगाउनुहोस् :

(क) संयुक्त फलनको सन्दर्भमा तलको कुन भनाइ गलत छ ?

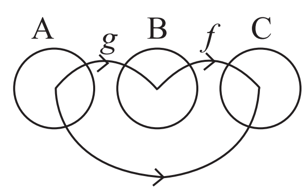
a. फलनहरू f: A→B र g: B→C छ र सम्बन्ध A→C पनि फलन परिभाषित भएमा संयुक्त फलन हुन्छ ।

b. फलनहरू g: A→B र f: B→C एक एक सम्पूर्ण फलन (one to one and onto) भएमा फलन A→C संयुक्त फलन हुन्छ ।

c. फलनहरू g: A→B र f: B→C परिभाषित भएमा फलन A→C लाई gof ले जनाइन्छ ।

d. फलनहरू f: A→B र g: B→C परिभाषित भएमा सम्बन्ध C→A, f र g को संयुक्त फलन फलन हुँदैन ।

(ख) तलको मिलानचित्रमा A बाट C सम्मको परिभाषित फलनलाई केले जनाइन्छ ?



a. $fg(x)$ b. $gf(x)$

c. $ff(x)$ d. $gg(x)$

(ग) यदि $f(x) = \{(3, -1), (2, 0), (1, 1)\}$ र $g(x) = \{(-1, 4), (0, 5), (1, 6)\}$ भए, $gf(x)$ कति होला ?

a. $\{(4, 3), (2, 5), (1, 6)\}$ b. $\{(3, 4), (2, 5), (2, 6)\}$

c. $\{(3, 4), (1, 5), (2, 6)\}$ d. $\{(3, 4), (2, 5), (1, 6)\}$

(घ) यदि $f(x) = 3x - 1$ र $g(x) = x + 1$ भए, $fg(x)$ कति हुन्छ ?

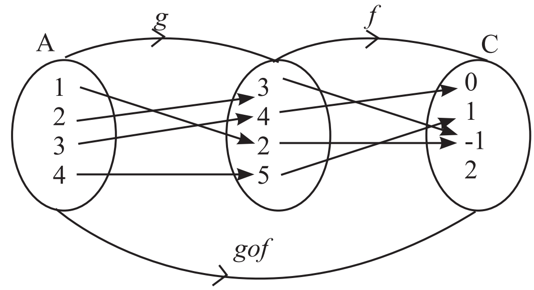
a. $3x - 1$ b. $3x + 1$ c. $3x - 2$ d. $3x + 2$

(ङ) यदि $f(x) = 1 - 3x$ र $g(x) = 2x + 1$ भए, $gf(\frac{1}{2})$ कति हुन्छ ?

a. 3 b. 1 c. 2 d. 0

2. मिलानचित्रसहित संयुक्त फलनलाई परिभाषित गर्नुहोस् ।

3. दिइएको मिलानचित्रमा फलन $g: A \rightarrow B$ र $f: B \rightarrow C$ परिभाषित छ भने तलका प्रश्नहरूको उत्तर दिनुहोस् :



(क) फलन $g: A \rightarrow B$ लाई क्रमजोडाका रूपमा लेख्नुहोस् ।

(ख) फलन $f: B \rightarrow C$ लाई क्रमजोडाका रूपमा लेख्नुहोस् ।

(ग) $fog(1)$, $fog(2)$, $fog(3)$ र $fog(5)$ का मान निकाल्नुहोस् ।

(घ) संयुक्त फलन fog लाई क्रमजोडाका रूपमा लेख्नुहोस् ।

(ङ) संयुक्त फलन fog लाई क्रमजोडाका रूपमा लेख्नुहोस् ।

4. यदि $f(x) = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$ र $g(x) = \{(2, 4), (3, 5), (4, 6)\}$ भए, $gf(x)$ लाई मिलानचित्रमा देखाई क्रमजोडाका रूपमा लेख्नुहोस् ।

5. यदि $f(x) = 3x + 2$ र $g(x) = 5 - 3x$ भए, तलका संयुक्त फलनहरूको मान निकाल्नुहोस् :

(क) $gf(x)$ (ख) $fg(x)$ (ग) $ff(x)$ (घ) $ff(3)$

6. यदि $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+3}$ $(x \neq -3)$ र $g(x) = \dfrac{3x+2}{x-4}$ $(x \neq 4)$ भए, $fg(x)$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

7. यदि $f(x) = 2x + 5$ र $g(x) = \dfrac{x-5}{2}$ भए, $fg(x)$ एउटा एकात्मक फलन हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

8. (क) यदि $f(x) = \dfrac{x-3}{2}$ र $fg(x) = x$ भए, $g(x)$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) यदि $g(x) = 4 - x$ र $gh(x) = 11 - 2x$ भए, $h(x)$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

9. (क) यदि $f(x) = \dfrac{6}{x-2}$ $(x \neq 2)$, $g(x) = ax^2 - 1$ र $gf(5) = 7$ भए, a को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) यदि $f(x) = ax + 5$, $g(x) = 8x + 13$ र $gf(5) = 93$ भए, a को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

10. यदि $f(x) = kx + 1$, $g(x) = 3x - 7$ र $gf(1) = 2$ भए k को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

11. यदि $f(x) = 3x - 2$, $fg(x) = 6x - 2$ र $gf(x) = 8$ भए x को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

उत्तर

1. (क) c (ख) a (ग) d (घ) d (ङ) d

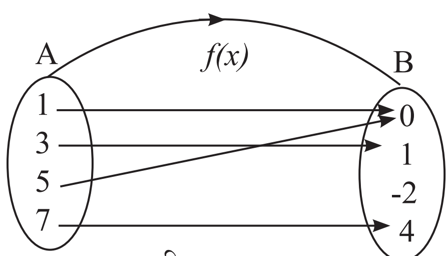
2 - 4. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् । 5. (क) $-1 - 9x$ (ख) $17 - 9x$ (ग) $9x + 8$ (घ) 35

6. $\dfrac{5x+8}{6x-10}$ 8. (क) $2x+3$ (ख $2x - 7$ 9. (क) 2 (ख) 1 10. 2 11. 2

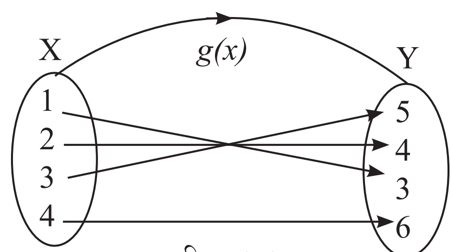
1.3 विपरीत फलन (Inverse Function)

क्रियाकलाप 1

दिइएका मिलानचित्र अवलोकन गरी तलका प्रश्नमा छलफल गरेर निष्कर्ष निकाल्नुहोस् :



चित्र (क)



चित्र (ख)

(क) के समूह A बाट समूह B मा फलन $f(x)$ परिभाषित छ ?

(ख) के समूह A र समूह B का क्षेत्र (domain) र सहक्षेत्र (codomain) एकआपसमा साटासाट गर्दा फलन परिभाषित हुन्छ ?

(ग) के समूह X बाट समूह Y मा फलन $g(x)$ परिभाषित छ ?

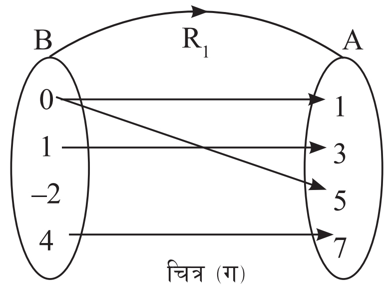
(घ) के समूह X र समूह Y का क्षेत्र र विस्तार क्षेत्र एकआपसमा साटासाट गर्दा फलन परिभाषित हुन्छ ?

माथिको मिलानचित्र (क) मा फलन $f(x): A \to B = \{(1, 0), (3, 1), (5, 0), (7, 4)\}$ परिभाषित छ, जहाँ, फलन $f(x)$ को क्षेत्र $= \{1, 3, 5, 7\}$ र सहक्षेत्र $= \{0, 1, -2, 4\}$

यस फलन $f(x): A \to B$ को क्षेत्र र सहक्षेत्रहरू एकआपसमा साटासाट गर्दा क्रमजोडा र मिलानचित्रको सम्बन्ध क्रमशः यस प्रकार बन्छ :

$R_1: B \to A = \{(0, 1), (1, 3), (0, 5), (4, 7)\}$

यस सम्बन्ध $R_1: B \rightarrow A$ परिभाषित छैन किनकि पहिलो समूह B को एउटा सदस्य 0 ले दुईओटा सदस्य 1 र 5 सँग सम्बन्ध देखाएको छ । त्यस्तै सदस्य –2 ले कुनै पनि सदस्यसँग सम्बन्ध देखाएको छैन । यसरी पहिलो फलन $f(x)$ को क्षेत्र र सहक्षेत्रहरू एकअर्कामा साटासाट गर्दा फलन परिभाषित छैन ।

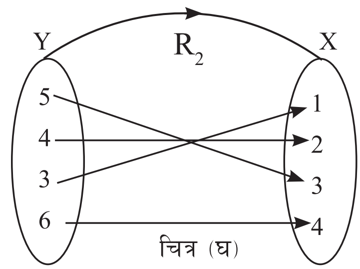


चित्र (ग)

त्यस्तै माथिको मिलानचित्र (ख) मा फलन $g(x): X \rightarrow Y$ $= \{(1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6)\}$ परिभाषित छ, जहाँ,

फलन $g(x)$ को क्षेत्र = $\{1, 2, 3, 4\}$ र सहक्षेत्र = $\{3, 4, 5, 6\}$

यस फलन $g(x): X \rightarrow Y$ को क्षेत्र र सहक्षेत्रहरू एकअर्कामा साटासाट गर्दा क्रमजोडा र मिलानचित्रको क्रमशः सम्बन्ध यस प्रकार बन्छ :



चित्र (घ)

$R_2: Y \rightarrow X = \{(3, 1), (4, 2), (5, 3), (6, 4)\}$

यस सम्बन्ध $R_2: Y \rightarrow X$ परिभाषित छ किनकि पहिलो समूह Y को प्रत्येक सदस्यले कुनै एउटा निश्चित सदस्यसँग सम्बन्ध देखाएको छ । यसरी दोस्रो फलन $g(x)$ को क्षेत्र र सहक्षेत्रहरू एकअर्कामा साटासाट गर्दा पनि फलन परिभाषित भएको छ । तसर्थ, कुनै पनि फलनको क्षेत्र र सहक्षेत्रहरू एकअर्कामा साटासाट गर्दा पनि फलन परिभाषित भएमा यसलाई दिइएको फलनको विपरीत फलन भनिन्छ । यसरी दिइएको फलन $g(x)$ भएमा विपरीत फलनलाई $g^{-1}(x)$ वा g^{-1} ले जनाइन्छ र g को विपरीत फलन वा 'Inverse function of g' भनेर पढिन्छ ।

> कुनै पनि फलन $f(x)$ को क्षेत्र र सहक्षेत्रहरू एकअर्कामा साटासाट गर्दा पनि फलन परिभाषित भएमा यसलाई फलन $f(x)$ को विपरीत फलन भनिन्छ । फलन $f(x)$ को विपरीत फलनलाई $f^{-1}(x)$ वा f^{-1} ले जनाइन्छ र f को विपरीत फलन वा 'Inverse function of f' भनेर पढिन्छ । यदि फलन $y = f(x)$ भए विपरीत फलनका लागि x र y को भूमिका साटासाट गर्दा $x = f(y)$ हुन्छ र $y = f^{-1}(x)$ लेखिन्छ ।

विचारणीय प्रश्न : के कुनै पनि फलन $f(x)$ को विपरीत फलन $f^{-1}(x)$ परिभाषित हुन सो फलन एक एक सम्पूर्ण फलनका रूपमा परिभाषित भएको हुनुपर्छ ? त्यस्तै के सबै अवस्थाका फलन $f(x)$ को विपरीत फलन $f^{-1}(x)$ परिभाषित हुन सक्छ, छलफल गर्नुहोस् ।

उदाहरण 1

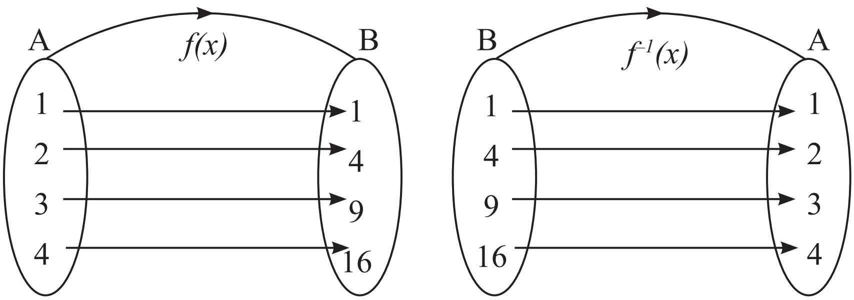
यदि $f(x)$ एक एक सम्पूर्ण फलन हो र $f(x) = \{1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16)\}$ छ भने $f^{-1}(x)$ को मान क्रमजोडाका रूपमा पत्ता लगाई मिलानचित्रमा देखाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

$f(x) = \{1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16)\}$

$= \{1, 1), (4, 2), (9, 3), (16, 4)\}$

अब, $f(x)$ र $f^{-1}(x)$ लाई मिलानचित्रमा देखाउँदा



उदाहरण 2

यदि $f(x) = 3x - 5$ एउटा एक एक फलन हो भने जहाँ $x \in R$ र R वास्तविक सङ्ख्याको समूह हो । के यो फलन $f(x)$ एक एक सम्पूर्ण फलन हो, यदि हो भने यसको $f^{-1}(x)$ पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

$f(x) = 3x - 5$ एउटा एक एक भने फलन हो जहाँ $x \in R$ र R वास्तविक सङ्ख्या हो ।

तसर्थ, प्रत्येक प्रतिबिम्बको फरक फरक पूर्वप्रतिबिम्ब छ । अर्थात् दुईओटा प्रतिबिम्ब एकआपसमा बराबर हुँदा पूर्वप्रतिबिम्ब पनि बराबर छन् । त्यसैले फलन $f(x)$ एक एक सम्पूर्ण फलन हो र यस फलन $f(x)$ को विपरीत फलन परिभाषित हुन्छ ।

अब, $f(x) = 3x - 5$

अथवा, $y = 3x - 5$

फेरि, x र y एकआपसमा साटासाट गर्दा

अथवा, $x = 3y - 5$

अथवा, $x + 5 = 3y$

अथवा, $y = \frac{x+5}{3}$

अतः $f^{-1}(x) = \frac{x+5}{3}$

उदाहरण 3

यदि $f(x) = \frac{x+3}{2}$ एक एक सम्पूर्ण फलन र $f^{-1}(x) = x$ भए x को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

$f(x) = \frac{x+3}{2}$

अथवा, $y = \frac{x+3}{2}$

फेरि, x र y एकआपसमा साटासाट गर्दा

अथवा, $x = \frac{y+3}{2}$

अथवा, $2x = y + 3$

अथवा, $y = 2x - 3$

अतः $f^{-1}(x) = 2x - 3$

अब, $f^{-1}(x) = x$

अथवा, $2x - 3 = x$

अथवा, $2x - x = 3$

अतः $x = 3$

उदाहरण 4

यदि $f(x) = \frac{3x+4}{5}$ र $g(x) = 8x - 3$ दुईओटा एक एक सम्पूर्ण फलन भए $f^{-1}g(1)$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

$f(x) = \frac{3x+4}{5}$ र $g(x) = 8x - 3$ छन् ।

अब, $f(x) = \frac{3x+4}{5}$

अथवा, $y = \frac{3x+4}{5}$

फेरि, x र y एकआपसमा साटासाट गर्दा

अथवा, $x = \frac{3y+4}{5}$

अथवा, $5x = 3y + 4$

अथवा, $5x - 4 = 3y$

अथवा, $y = \frac{5x-4}{3}$

अतः $f^{-1}(x) = \frac{5x-4}{3}$

अब, $f^{-1}g(x) = f^{-1}(g(x)) = f^{-1}(8x - 3)$

$= \frac{5(8x-3)-4}{3} = \frac{40x-15-4}{3}$

$= \frac{40x-19}{3}$

फेरि, $f^{-1}g(1) = \frac{40\times1-19}{3} = \frac{21}{3} = 7$

अतः $f^{-1}g(1) = 7$

उदाहरण 5

यदि $f(x) = 2x - 3$ र $g(x) = \frac{2x-7}{3}$ दुईओटा एक एक सम्पूर्ण फलन छन् । यदि $ff(x) = g^{-1}(x)$ भए x को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ, $f(x) = 2x - 3$ र $g(x) = \frac{2x-7}{3}$

$ff(x) = f(f(x)) = f(2x-3) = 2(2x-3) - 3 = 4x - 6 - 3 = 4x - 9$

$g^{-1}(x)$ का लागि,

यहाँ, $g(x) = \frac{2x-7}{3}$

अथवा, $y = \frac{2x-7}{3}$

फेरि, x र y एकआपसमा साटासाट गर्दा

$x = \frac{2y-7}{3}$

अथवा, $3x = 2y - 7$

अथवा, $3x + 7 = 2y$

अथवा, $y = \frac{3x+7}{2}$

अतः $g^{-1}(x) = \frac{3x+7}{2}$

अब, $ff(x) = g^{-1}(x)$

अथवा, $4x - 9 = \frac{3x+7}{2}$

अथवा, $8x - 18 = 3x + 7$

अथवा, $8x - 3x = 7 + 18$

अथवा, $5x = 25$

अतः $x = 5$

अभ्यास 1.2

1. **दिइएका प्रश्नहरूको उपयुक्त उत्तरमा ठिक चिह्न (✓) लगाउनुहोस् :**

(क) विपरीत फलनको सन्दर्भमा तलका भनाइ कुन सही छ ?

a. फलन $f: A \rightarrow B$ भएमा सबै अवस्थामा विपरीत फलन परिभाषित हुन्छ ।

b. फलन $f: A \rightarrow B$ भएमा सबै अवस्थामा विपरीत फलन $B \rightarrow A$ पनि परिभाषित हुन्छ ।

c. फलन $f: A \rightarrow B$ एक एक सम्पूर्ण फलन भएमा विपरीत फलन $A \rightarrow B$ पनि फलन हुन्छ ।

d. फलन $f: A \rightarrow B$ एक एक सम्पूर्ण फलन भएमा विपरीत फलन $B \rightarrow A$ पनि फलन हुन्छ ।

(ख) यदि $f(x) = \{(1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16)\}$ एक एक सम्पूर्ण फलन भए, $f^{-1}(x)$ कति होला ?

a. $\{(1, 1), (4, 2), (3, 9), (16, 4)\}$ b. $\{(1, 1), (4, 2), (9, 3), (16, 4)\}$

c. $\{(1, 1), (4, 2), (3, 9), (4, 16)\}$ d. $\{(1, 1), (2, 4), (3, 9), (16, 4)\}$

(ग) यदि $f(x) = 4x + 5$ एक एक सम्पूर्ण फलन भए, $f^{-1}(x)$ को मान कति हुन्छ ?

a. $5 - 4x$ b. $\frac{x-4}{5}$ c. $\frac{x+5}{4}$ d. $\frac{x-5}{4}$

(घ) यदि $g(x) = \frac{1-3x}{5}$ एक एक सम्पूर्ण फलन भए, $g^{-1}(x)$ को मान कति होला ?

a. $\frac{1+3x}{5}$ b. $\frac{1-5x}{5}$ c. $\frac{1-5x}{3}$ d. $\frac{1+5x}{3}$

(ङ) यदि $h(x) = \frac{1+2x}{3}$ एक एक सम्पूर्ण फलन भए, $h^{-1}(-1)$ को मान कति हुन्छ ?

a. -2 b. -1 c. 1 d. 2

2. विपरीत फलन भनेको के हो, मिलानचित्रसहित परिभाषित गर्नुहोस् ।

3. यदि $f(x)$ एक एक सम्पूर्ण फलन हो र $f(x) = \{1, 2), (2, 4), (3, 6)\}$ छ भने $f^{-1}(x)$ को मान क्रमजोडाका रूपमा पत्ता लगाउनुहोस् र मिलानचित्रमा पनि देखाउनुहोस् ।

4. यदि $f(x) = 2x - 3$ एउटा फलन हो, जहाँ $x \in R$ र R वास्तविक सङ्ख्या हो । के यो फलन $f(x)$ एक एक सम्पूर्ण फलन हो, फलन $f(x)$ एक एक सम्पूर्ण फलन भएमा यसको $f^{-1}(x)$ पत्ता लगाउनुहोस् ।

5. दिइएको अवस्थामा चलराशि x को मान निकाल्नुहोस् :

(क) यदि $f(x) = 5x - 2$ र $f^{-1}(x) = 2$ भए x को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) यदि $g(x) = \frac{3x-7}{4}$ र $g^{-1}(x) = 5$ भए x को मान निकाल्नुहोस् ।

(ग) यदि $h(x) = \frac{2x-3}{3x-5}$ र $h^{-1}(x) = 2$ भए x को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(घ) यदि $f(x) = \frac{x}{3+2x}$ र $f^{-1}(x) = f(x)$ भए x को मान निकाल्नुहोस् ।

6. (क) यदि $f(x) = 7x - 1$ र $g(x) = \frac{2x-3}{5}$ एक एक सम्पूर्ण फलनहरू भए $g^{-1}f(x)$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) यदि $f(x) = 4x - 3$ र $g(x) = \frac{x+2}{5}$ एक एक सम्पूर्ण फलनहरू भए $f^{-1}g^{-1}(2)$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) यदि $g(x) = \frac{3x-1}{x-1}, x \neq 1$ र $h(x) = \frac{2x-1}{x-3}, x \neq 3$ भए $(gh)^{-1}(x)$ र $(hg)^{-1}(x)$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

7. (क) $f(x) = 2x - 3$ र $g(x) = \frac{2x-7}{3}$ एक एक सम्पूर्ण फलनहरू हुन् । यदि $ff(x) = g^{-1}(x)$ हुँदा x को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) $f(x) = 2x - 5$ र $g(x) = \frac{3x+5}{2}$ एक एक सम्पूर्ण फलनहरू हुन् । यदि $f\,f(x) = g^{-1}(x)$ भए x को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) $f(x) = \frac{x+1}{2}$ र $g(x) = \frac{x-5}{2}$ एक एक सम्पूर्ण फलनहरू हुन् । यदि $fg^{-1}(x) = 6$ भए x को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

उत्तर

1. (क) d (ख) b (ग) d (घ) c (ङ) a

2–3 शिक्षकलाई देखाउनुहोस् । 4. हो, $f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}$

5. (क) 8 (ख) 2 (ग) 1 (घ) 0, –1 6. (क) $\frac{35x-2}{2}$ (ख) $\frac{11}{4}$ (ग) $\frac{2x}{5-x^2}$, $\frac{2x+12}{5}$

7. (क) 5 (ख) 4 (ग) 3

परियोजना कार्य

आफ्नो वरपर छिमेकका तीनओटा परिवारमा गई ती परिवारमा भएका महिलाहरूको तीन पुस्ता हजुरआमा तथा हजुरबुबा, आमा तथा बुबा र नातिनी तथा नातिहरूको नामको तथ्याङ्क सङ्कलन गर्नुहोस् । ती तीनै पुस्ताका नामका आधारमा महिला र पुरुषको छुट्टाछुट्टै समूहबाट बन्ने संयुक्त फलनलाई मिलानचित्रमा देखाउनुहोस् । संयुक्त फलन परिभाषित हुन्छ कि हुँदैन भनी निष्कर्ष निकालेर प्रतिवेदन तयार पार्नुहोस् र कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

पाठ 2

बहुपदीय (Polynomial)

2.1 परिचय (Introduction)

चलराशिको घाताङ्क पूर्ण सङ्ख्या भएको बीजीय अभिव्यञ्जकलाई बहुपदीय भनिन्छ । बहुपदीयको धारणाका बारेमा विशेष योगदान पुऱ्याउने परापूर्वकालका ग्रिक गणितज्ञ Diophantus of Alexandria हुन् तसर्थ उनलाई बहुपदीयका पिता भनिन्छ । बहुपदीयको थप विकासका लागि Diophantus का अतिरिक्त Babylonian, Egyptian र Chinese गणितज्ञहरू तथा इस्लामिक गणितज्ञहरू AI-Karaji र AI-Samawal को योगदान छ । सोह्रौं शताब्दीमा François Viète र सत्रौं शताब्दीमा आएर René Descartes ले यस क्षेत्रमा योगदान पुऱ्याएका छन् ।

Diophantus of Alexandria

बहुपदीय एक फलन भएकाले गणितका अतिरिक्त माग, पूर्ति, गति, प्रवेग, खर्च, उत्पादन जस्ता दैनिक उपयोगका क्षेत्रमा प्रयोगमा आउँछन् । बहुपदीय रेखीय, एकात्मक, वर्ग घातीय, घन घातीय, चार घातीय आदि हुन्छन् । डिग्री n को बहुपदीयलाई फलनका रूपमा यसरी लेखिन्छ : $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+a_{n-3}x^{n-3}+......................+a_2x^2+a_1x^1+a_0$, जसमा गुणाङ्कहरू : a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3} ले वास्तविक सङ्ख्या (real number) हरूलाई जनाउँछ भने x^n को n ले पूर्ण सङ्ख्या (whole number) जनाउँछ । बहुपदीयमा चलराशिका घात शून्य वा धनात्मक पूर्ण सङ्ख्या मात्र हुन्छ ।

2.2 शेष साध्य (Remainder Theorem)

बहुपदीय $f(x) = x^4 - 3x^2 + 5x - 4$ लाई भाजक $d(x) = x - 2$ ले साधारण विधिबाट भाग गर्दा भागफल $q(x)$ र शेष R कति कति हुन्छ, छलफल गरी निष्कर्ष निकाल्नुहोस् ।

बहुपदीय $f(x) = x^4 - 3x^2 + 5x - 4$ र भाजक $d(x) = x - 2$ हुँदा, $f(x)$ लाई $d(x)$ ले साधारण विधिबाट भाग गर्दा

$$x-2)\ x^4-3x^2+5x-4\ (x^3+2x^2+x+7$$
$$x^4-2x^3$$
$$(-)\quad(+)$$
$$2x^3-3x^2+5x-4$$
$$2x^3-4x^2$$
$$(-)\quad(+)$$
$$x^2+5x-4$$
$$x^2-2x$$
$$(-)\quad(+)$$
$$7x-4$$
$$7x-14$$
$$(-)\quad(+)$$
$$10$$

अतः बहुपदीय $f(x) = x^4 - 3x^2 + 5x - 4$ र भाजक $d(x) = x - 2$ हुँदा भागफल $q(x) = x^3 + 2x^2 + x + 7$ र शेष R = 10 हुन्छ । यसरी, यस समस्यामा $x^4 - 3x^2 + 5x - 4 = (x^3 + 2x^2 + x + 7)(x - 2) + 10$ छ । तसर्थ, बहुपदीय $f(x)$ लाई भाजक $d(x)$ ले भाग गर्दा भागफल $q(x)$ र शेष R हुँदा बहुपदीयहरू : $f(x)$, $d(x)$, $q(x)$ र R को सम्बन्ध यस प्रकार हुन्छ :

$$f(x) = d(x) \times q(x) + \mathrm{R}$$

अथवा, $\dfrac{f(x)}{d(x)} = \dfrac{d(x) \times q(x)}{d(x)} + \dfrac{\mathrm{R}}{d(x)}$

अथवा, $\dfrac{f(x)}{d(x)} = q(x) + \dfrac{\mathrm{R}}{d(x)}$

यदि R = 0 भए $\dfrac{f(x)}{d(x)} = q(x)$ हुन्छ र $q(x)$ को डिग्रीभन्दा $d(x)$ को डिग्री कम हुन्छ ।

बहुपदीय $f(x)$ लाई भाजक $d(x)$ ले भाग गर्दा भागफल $q(x)$ र शेष R हुँदा बहुपदीयहरू : $f(x)$, $d(x)$, $q(x)$ र R को सम्बन्ध यस प्रकार हुन्छ : $f(x) = d(x) \times q(x) + R$.

बहुपदीय $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x - 6$ मा x का मानहरू क्रमशः $-1, 0, 1, -2, 2, -3, 3$ राख्दा $f(x)$ को मान कति कति होला, पत्ता लगाउनुहोस् । के $f(1)$ को मान शून्य हुन्छ ? भाजक $x - 1$ ले बहुपदीय $f(x)$ लाई भाग गर्दा शेष शून्य हुन्छ ?

x का मानहरू क्रमशः $-1, 0, 1, -2, 2, -3, 3$ राख्दा $f(x)$ को मान कति कति होला ?

$f(-1) = (-1)^3 + 2(-1)^2 + 3(-1) - 6 = -1 + 2 - 3 - 6 = -8$

$f(0) = (0)^3 + 2(0)^2 + 3(0) - 6 = 0 + 0 + 0 - 6 = -6$

$f(1) = (1)^3 + 2(1)^2 + 3(1) - 6 = 1 + 2 + 3 - 6 = 0$

$f(-2) =$ .... = ?

$f(2) =$ .... = ?

$f(-3) =$ .... = ?

$f(3) =$ .... = ?

यसरी बहुपदीय $f(x)$ मा x को मान a राख्दा फलनको मान जति आउँछ, त्यो नै दिइएको बहुपदीयलाई $(x - a)$ ले भाग गर्दा आउने शेष हो । अर्थात् बहुपदीय $f(x)$ लाई रेखीय बहुपदीय $x - a$ ले भाग गर्दा आउने मान $f(a)$ नै दिइएको बहुपदीयको शेष हो ।

शेष साध्य : डिग्री n भएको बहुपदीय $f(x)$ लाई $x - a$ ले भाग गर्दा शेष $f(a)$ हुन्छ र भागफलको डिग्री $n - 1$ हुन्छ । अर्थात्, $R = f(a)$ हुन्छ ।

प्रमाण

बहुपदीय $f(x)$ लाई भाजक $(x - a)$ ले भाग गर्दा भागफल $q(x)$ र शेष R हुँदा साधारण भाग विधिअनुसार $f(x)$, $(x - a)$, $q(x)$ र R को सम्बन्ध यस प्रकार हुन्छ :

$f(x) = q(x) \times (x - a) + R \qquad \ldots (i)$

समीकरण (i) मा x को मान a राख्दा

अथवा, $f(a) = q(x) \times (a - a) + R$

अथवा, $f(a) = q(x) \times 0 + R$

अथवा, $f(a) = 0 + R$

अथवा, $f(a) = R$

अतः $R = f(a)$ प्रमाणित भयो ।

भाज्य र भाजक दिइएको अवस्थामा शेष निम्नानुसार हुन्छ :

बहुपदीय $f(x)$	भाजक $d(x)$	शेष R
$f(x)$	$x - a$	$f(a)$
$f(x)$	$x + a = x - (-a)$	$f(-a)$
$f(x)$	$ax - b = a(x - \frac{b}{a})$	$f(\frac{b}{a})$
$f(x)$	$ax + b = a\{x - (-\frac{b}{a})\}$	$f(-\frac{b}{a})$

उदाहरण 1

शेष साध्य प्रयोग गरी बहुपदीय $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1$ लाई भाजक $d(x) = x - 2$ ले भाग गर्दा आउने शेष R पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, बहुपदीय $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1$ र भाजक $d(x) = x - 2$ छ ।

अब, भाजक $d(x) = x - 2$ हुँदा, $x - 2$ लाई $x - a$ सँग तुलना गर्दा, $x = a$ हुन्छ ।

फेरि, अब, शेष साध्यअनुसार

$$\begin{aligned} \text{शेष } R &= f(a) = f(2) = 4(2)^3 + 3(2)^2 - 2(2) + 1 \\ &= 4 \times 8 + 3 \times 4 - 4 + 1 \\ &= 32 + 12 - 4 + 1 \\ &= 32 + 12 - 4 + 1 \end{aligned}$$

अतः शेष $R = 41$

उदाहरण 2

शेष साध्य प्रयोग गरी बहुपदीय $f(x) = 2x^4 - 7x^3 + 12x^2 - 17x + 7$ लाई भाजक $d(x) = 2x - 3$ ले भाग गर्दा आउने शेष R पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, $f(x) = 2x^4 - 7x^3 + 12x^2 - 17x + 7$ लाई भाजक $d(x) = 2x - 3$ छ ।

अब, भाजक $d(x) = 2x - 3 = 2(x - \frac{3}{2})$ हुँदा, $x - \frac{3}{2}$ लाई $x - a$ सँग तुलना गर्दा, $a = \frac{3}{2}$ हुन्छ ।

फेरि, शेष साध्यअनुसार

शेष R $= f(a)$

$$= f(\tfrac{3}{2}) = 2(\tfrac{3}{2})^4 - 7(\tfrac{3}{2})^3 + 12(\tfrac{3}{2})^2 - 17(\tfrac{3}{2}) + 7$$

$$= 2 \times \frac{81}{16} - 7 \times \frac{27}{8} + 12 \times \frac{9}{4} - 17 \times \frac{3}{2} + 7$$

$$= \frac{81 - 189 + 216 - 204 + 56}{8} = \frac{-40}{8}$$

अतः शेष R $= -5$

उदाहरण 3

बहुपदीय $f(x) = 4x^3 - x^3 - 3x^2 + 3x - k$ लाई भाजक $d(x) = x - 2$ ले भाग गर्दा शेष 12 रहन्छ भने k को मान निकाल्नुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

बहुपदीय $f(x) = 4x^3 - 4x^2 + 3x - k$, भाजक $x - 2$ र शेष 12 छ ।

अब, शेष साध्यअनुसार

शेष R $= f(a)$

अथवा, $R = f(2)$

अथवा, $12 = 4(2)^3 - 3(2)^2 + 3(2) - k$

अथवा, $12 = 4 \times 8 - 3 \times 4 + 3 \times 2 - k$

अथवा, $12 = 32 - 12 + 6 - k$

अथवा, $k = 32 - 12 + 6 - 12$

अतः $k = 14$

उदाहरण 4

बहुपदीयहरू $f(x) = 2x^2 - 5x + k$ र $g(x) = x^3 - x^2 + kx + 5$ दुवैलाई $x - 2$ ले भाग गर्दा शेष बराबर आउँछ भने k को मान निकाल्नुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

बहुपदीयहरू $f(x) = 2x^2 - 5x + k$ र $g(x) = x^3 - x^2 + kx + 5$ तथा भाजक $x - 2$ र शेष बराबर छ ।

अब, $f(2) = 2 \times 2^2 - 5 \times 2 + k$

$= 2 \times 4 - 10 + k$

$= 8 - 10 + k$

$= -2 + k$

फेरि, $g(2) = (2)^3 - (2)^2 + k(2) + 5$

$= 8 - 4 + 2k + 5$

$= 9 + 2k$

प्रश्नबाट, $f(2) = g(2)$

अथवा, $-2 + k = 9 + 2k$

अथवा, $-2 - 9 = 2k - k$

अथवा, $-11 = k$

अत: $k = -11$

अभ्यास 2.1

1. **दिइएका प्रश्नहरूको उपयुक्त विकल्पमा ठिक चिह्न (✓) लगाउनुहोस् :**

(क) बहुपदीय $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ र $g(x) = x + 1$ भए $f(x) \div g(x)$ को डिग्री कति होला ?

a. 1 b. 2 c. 3 d. 4

(ख) बहुपदीय $f(x)$ लाई भाजक $d(x)$ ले भाग गर्दा भागफल $q(x)$ र शेष R हुन्छ भने बहुपदीयहरू: $f(x)$, $d(x)$, $q(x)$ र $r(x)$ को सम्बन्ध तलका मध्ये कुन सही हुन्छ ?

a. $f(x) = d(x) \times q(x) + \text{R}$ b. $f(x) = q(x) \times q(x) + \text{R}$

c. $f(x) = \text{R} \times q(x) + d(x)$ d. $f(x) = d(x) \times \text{R} + \text{R}$

(ग) बहुपदीय $f(x)$ लाई $x - a$ ले भाग गर्दा शेष कति होला ?

a. 0 b. 1 c. $f(x)$ d. $f(a)$

(घ) बहुपदीय $f(x)$ लाई $ax + b$ ले भाग गर्दा शेष कति होला ?

a. $f(\frac{a}{b})$ b. $f(-\frac{a}{b})$ c. $f(-\frac{b}{a})$ d. $f(\frac{b}{a})$

(ङ) बहुपदीय $(x^3 - x^2 + 1)$ लाई $(x - 1)$ ले भाग गर्दा शेष कति होला ?

a. 0 b. 1 c. 2 d. 3

(च) बहुपदीय $x^3 + 3x^2 - kx + 4$ लाई $x - 2$ ले भाग गर्दा शेष 4 रहन्छ भने k को मान कति हुन्छ ?

a. 10 b. 8 c. 4 d. 2

2. शेष साध्यको कथन लेखी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

3. **दिइएको अवस्थामा शेष साध्य प्रयोग गरी शेष पत्ता लगाउनुहोस् :**

(क) $(x^3 - x^2 + 1) \div (x - 2)$

(ख) $(x^3 + 5x^2 - 6x - 16) \div (x + 1)$

(ग) $(6x^3 + 4x^2 + 3x + 4) \div (3x - 4)$

(घ) $(8x^4 + 5x^3 - 2x^2 + 7x - 1) \div (2x + 6)$

4. (क) बहुपदीय $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - kx + 4$ लाई भाजक $x + 2$ ले भाग गर्दा शेष 16 रहन्छ भने k को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) बहुपदीय $f(x) = 8x^3 + 4x^2 + (k - 3)x - 7$ लाई भाजक $2x - 1$ ले भाग गर्दा शेष -2 रहन्छ भने k को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) बहुपदीय $f(x) = x^3 - (p - 2)x^2 - px + 28$ लाई $x + 3$ ले भाग गर्दा शेष 10 रहन्छ भने शेष साध्य प्रयोग गरी p को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

5. (क) बहुपदीयहरू $f(x) = 2x^3 - (k - 2)x^2 - 7x + 14$ र $g(x) = 3x^3 + 8x^2 - kx + 6$ दुबैलाई $x + 2$ ले भाग गर्दा शेष बराबर आउँछ भने शेष साध्य प्रयोग गरी k को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) बहुपदीयहरू $f(x) = 2x^3 + hx^2 - 10x + 8$ र $g(x) = 6x^3 - hx^2 + 6$ दुबैलाई $2x - 1$ ले भाग गर्दा शेष बराबर आउँछ भने शेष साध्य प्रयोग गरी h को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) बहुपदीय $f(x) = x^3 + mx^2 - nx + 6$ लाई $x + 2$ ले भाग गर्दा शेष 24 र $x - 3$ ले भाग गर्दा शेष 54 आउँछ भने शेष साध्य प्रयोग गरी m र n को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

उत्तर

1. (क) b (ख) a (ग) d (घ) c (ङ) b (च) a

2. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् । 3. (क) 5 (ख) -6 ग) $\frac{88}{3}$ (घ) 473

4. (क) 8 (ख) 9 (ग) $\frac{3}{2}$ 5. (क) 1 (ख) 7 (ग) 4 र 5

2.3 गुणनखण्ड साध्य (Factor Theorem)

बहुपदीय $f(x) = x^2 - 5x + 6$ मा $f(2)$ र $f(3)$ का मानहरू कति कति होलान्, पत्ता लगाउनुहोस् । बहुपदीय $f(x)$ मा x को मान कति हुँदा $f(x)$ शून्य हुन्छ ? के गुणनखण्डहरू $x - 2$ र $x - 3$ ले बहुपदीय $x^2 - 5x + 6$ लाई भाग गर्दा नि:शेष भाग जान्छ, छलफल गर्नुहोस् ।

बहुपदीय $f(x) = x^3 + 7x^2 - 12x + 4$ लाई भाजक $d(x) = x - 1$ ले साधारण विधिबाट भाग गर्दा भागफल $q(x)$ र शेष R कति कति हुन्छ, छलफल गरी निष्कर्ष निकाल्नुहोस् । $f(x)$, $q(x)$ र R को सम्बन्ध स्थापित गर्नुहोस् ।

बहुपदीय $f(x)$ लाई भाजक $d(x)$ ले भाग गर्दा भागफल $q(x)$ र शेष 0 हुँदा बहुपदीयहरू : $f(x)$, $d(x)$ र $q(x)$ को सम्बन्ध यस प्रकार हुन्छ : $f(x) = d(x) \times q(x)$
तसर्थ, बहुपदीय $f(x)$ लाई $x - a$ ले निःशेष भाग जान्छ भने बहुपदीय $f(x)$ को एउटा गुणनखण्ड $x - a$ हुन्छ ।

गुणनखण्ड साध्य : डिग्री n $(n \geq 1)$ भएको बहुपदीय $f(x)$ लाई $x - a$ ले निःशेष भाग जान्छ भने बहुपदीय $f(x)$ को एउटा गुणनखण्ड $x - a$ हुन्छ । अर्थात् $f(x) = q(x) \times (x - a)$ हुन्छ ।

प्रमाण

बहुपदीय $f(x)$ लाई भाजक $(x - a)$ ले भाग गर्दा भागफल $q(x)$ र शेष R हुँदा भाग विधिअनुसार $f(x)$, $(x - a)$, $q(x)$ र R को सम्बन्ध यस प्रकार हुन्छ :

$f(x) = q(x) \times (x - a) + R$ .... (i)

बहुपदीय $f(x)$ लाई $x - a$ ले भाग गर्दा निःशेष भाग जाने भएकाले समीकरण (i) मा R को मान 0 राख्दा

अथवा, $f(x) = q(x) \times (x - a) + 0$

अथवा, $f(x) = q(x) \times (x - a)$

अतः बहुपदीय $f(x)$ को $(x - a)$ एउटा गुणनखण्ड हो, प्रमाणित भयो ।

गुणनखण्ड साध्यको विलोम

यदि डिग्री n $(n \geq 1)$ को बहुपदीय $f(x)$ को गुणनखण्ड $(x - a)$ भए शेष $f(a) = 0$ हुन्छ ।

प्रमाण

यदि बहुपदीय $f(x)$ को गुणनखण्ड $x - a$ भए

$f(x) = q(x) \times (x - a)$ .... (i)

समीकरण (i) मा x को मान a राख्दा

अथवा, $f(a) = q(a) \times (a - a)$

अथवा, $f(a) = q(a) \times 0$

अतः $f(a) = 0$ प्रमाणित भयो ।

उदाहरण 1

बहुपदीय $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1$ को एउटा गुणनखण्ड $x - 1$ हो भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

बहुपदीय $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1$ को एउटा गुणनखण्ड $x - 1$ छ ।

अब, $f(1) = 2(1)^3 - 5(1)^2 + 4(1) - 1$
$= 2 - 5 + 4 - 1$
$= 6 - 6$

अतः $f(1) = 0$

अतः बहुपदीय $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1$ को एउटा गुणनखण्ड $x - 1$ हो, प्रमाणित भयो ।

उदाहरण 2

बहुपदीय $f(x) = x^3 - kx^2 + 3x + 6$ को एउटा गुणनखण्ड $x + 1$ भए k को मान निकाल्नुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

बहुपदीय $f(x) = x^3 - kx^2 + 3x + 6$ को एउटा गुणनखण्ड $x + 1$ छ ।

अब, $f(-1) = (-1)^3 - k(-1)^2 + 3(-1) + 6$

अथवा, $0 = -1 - k - 3 + 6$

अथवा, $0 = 2 - k$

अत: $k = 2$

उदाहरण 3

बहुपदीय $f(x) = 2x^k + 3x^{k-1} - 5x + 12$ को एउटा गुणनखण्ड $x + 3$ भए k को मान निकाल्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ, बहुपदीय $f(x) = 2x^k + 3x^{k-1} - 5x + 12$ को एउटा गुणनखण्ड $x + 3$ छ ।

अब, $f(-3) = 2(-3)^k + 3(-3)^{k-1} - 5(-3) + 12$

अथवा, $0 = 2(-3)^k + 3(-3)^k . (-3)^{-1} + 15 + 12$

अथवा, $0 = (-3)^k\{2 - 1\} + 27$

अथवा, $0 = (-3)^k + 27$

अथवा, $(-3)^k = (-3)^3$

अत: $k = 3$

उदाहरण 4

बहुपदीय $f(x) = 2x^3 - 7x^2 + 7x - 9$ बाट कति घटाउँदा उक्त बहुपदीयको एउटा गुणनखण्ड $x - 3$ हुन्छ ?

समाधान

यहाँ, बहुपदीय $f(x) = 2x^3 - 7x^2 + 7x - 9$ र एउटा गुणनखण्ड $x - 3$ छ ।

मानौँ, घटाउनुपर्ने सङ्ख्या $= k$

अब, प्रश्नअनुसार,

$f(3) = 2(3)^3 - 7(3)^2 + 7(3) - 9 - k$

अथवा, $0 = 54 - 63 + 21 - 9 - k$

अथवा, $0 = 3 - k$

अत: $k = 3$

अत: बहुपदीय $2x^3 - 7x^2 + 7x - 9$ बाट घटाउनुपर्ने सङ्ख्या 3 हो ।

अभ्यास 2.2

1. दिइएका प्रश्नहरूको उपयुक्त विकल्पमा ठिक चिह्न (✓) लगाउनुहोस् :

(क) बहुपदीय $f(x)$ को एउटा गुणनखण्ड $(\boldsymbol{x-a})$ ले $f(x)$ लाई भाग गर्दा $f(a)$ को मान कति हुन्छ ?

a. 0 b. 1 c. a d. $-a$

(ख) बहुपदीय $f(x)$ लाई एउटा रेखीय गुणनखण्डले भाग गर्दा शेष $f(-k)$ भए उक्त गुणनखण्ड कति हुन्छ ?

a. $x-a$ b. $x+k$ c. $x-k$ d. $x+a$

(ग) कुन अवस्थामा बहुपदीय $f(x)$ को एउटा गुणनखण्ड $(cx-d)$ हुन्छ ?

a. $f(\frac{c}{d})=0$ b. $f(-\frac{c}{d})=0$ c. $f(\frac{d}{c})=0$ d. $f(-\frac{d}{c})=0$

(घ) यदि एउटा बहुपदीय x^3+x^2+p+1 को एउटा गुणनखण्ड $(x-1)$ भए p को मान कति हुन्छ ?

a. -5 b. -4 c. -3 d. -1

(ङ) यदि एउटा बहुपदीय $3x^3+mx^2-7x-3$ को एउटा गुणनखण्ड $(x+3)$ भए m को मान कति हुन्छ ?

a. 2 b. 3 c. 5 d. 7

2. गुणनखण्ड साध्यको कथन लेख्नुहोस् । गुणनखण्ड साध्यअनुसार $f(x)$ को एउटा गुणनखण्ड $x-a$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

3. यदि डिग्री $n\ (n\geq 1)$ को बहुपदीय $f(x)$ को एउटा गुणनखण्ड $x-a$ भए शेष $f(a)=0$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

4. दिइएको अवस्थामा गुणनखण्ड साध्य प्रयोग गरी प्रमाणित गर्नुहोस् :

(क) बहुपदीय $f(x)=2x^2-11x+15$ को एउटा गुणनखण्ड $x-3$ हो ।

(ख) बहुपदीय $f(x)=2x^3-7x^2+13x-5$ को एउटा गुणनखण्ड $2x-1$ हो ।

(ग) बहुपदीय $f(x)=2x^3-5x^2+7x+5$ को एउटा गुणनखण्ड $2x+1$ हो ।

5. (क) बहुपदीय $f(x)=4x^2+kx+8$ को एउटा गुणनखण्ड $x+2$ भए k को मान निकाल्नुहोस् ।

(ख) बहुपदीय $f(x)=2x^3-kx^2-8x+5$ को एउटा गुणनखण्ड $x+1$ भए k को मान निकाल्नुहोस् ।

6. (क) बहुपदीय $f(x)=x^3+6x^2+11x+1$ मा कति जोड्दा उक्त बहुपदीयको एउटा गुणनखण्ड $x+1$ हुन्छ ?

(ख) बहुपदीय $f(x)=x^3+x^2-17x+7$ मा कति जोड्दा उक्त बहुपदीयको एउटा गुणनखण्ड $x-3$ हुन्छ ?

(ग) बहुपदीय $f(x) = x^3 + 9x^2 + 26x + 30$ बाट कति घटाउँदा उक्त बहुपदीयको एउटा गुणनखण्ड $x + 4$ हुन्छ ?

उत्तर					
1. (क) a	(ख) b	(ग) c	(घ) c	(ङ) d	2 - 3. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।
5. (क) 12	(ख) 11	6. (क) 5	(ख) 8	(ग) 6	

2.4 आनुपातिक मूल साध्य (Rational Root Theorem)

दिइएका प्रश्नहरू अध्ययन गरी छलफल गर्नुहोस् :

(क) के समीकरण $5x^3 - 6x^2 + 7x - 6 = 0$ मा चलराशि $x = 1$ राख्दा समीकरण मान्य हुन्छ ?

(ख) $5x^3 - 6x^2 + 7x - 6$ का गुणनखण्डहरू कसरी पत्ता लगाउन सकिन्छ ?

(ग) $5x^3 - 6x^2 + 7x - 6$ का गुणनखण्डहरू कुन कुन होलान् ?

डिग्री n भएको बहुपदीय समीकरण : $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$ मा a_n र a_0 क्रमशः अग्रणी गुणाङ्क (leading coefficient) र अचर पद (constant term) भएमा यस समीकरणका सम्भावित मूलहरू $\pm \dfrac{a_0 \text{ का गुणनखण्ड}}{a_n \text{ का गुणनखण्ड}}$ अर्थात् $\pm \dfrac{p}{q}$ हुन्छन् । यसलाई नै आनुपातिक मूल साध्य भनिन्छ । जहाँ, x का सम्भावित मूलहरू $\pm \dfrac{p}{q}$ लाई लघुतम पदका रूपमा बदल्नुपर्छ ।

आनुपातिक मूल साध्यको प्रयोग गरी बहुपदीयहरूको खण्डीकरण तथा बहुपदीय समीकरणहरूको हल गर्न सकिन्छ । बहुपदीय समीकरण $f(x) = 0$ लाई मान्य गर्ने चरहरू समीकरणका मूलहरू वा शून्यहरू (roots or zeros) हुन् । बहुपदीयहरूको खण्डीकरण तथा बहुपदीय समीकरणहरूको हल गर्नका लागि सबैभन्दा पहिले एउटा मूल पत्ता लगाउनुपर्छ ।

डिग्री 3 भएका बहुपदीयलाई खण्डीकरण गर्ने चरणहरू

(क) बहुपदीय $f(x)$ का पदहरूलाई चरको घाताङ्कको घट्दो क्रममा मिलाउनुहोस् ।

(ख) बहुपदीय $f(x)$ को पहिलो गुणनखण्ड निकाल्नका लागि दिइएको बहुपदीयको अचर पद (a_0) र अग्रणी गुणाङ्क (a_n) को अनुपात $\dfrac{a_0}{a_n}$ निकाली लघुतम पदमा लैजानुपर्छ। त्यसपछि अंश र हरका सम्भावित गुणनखण्डहरू निकालीसकेपछि चर (x) का विविध मानहरू $x = \pm1, \pm2, \pm3, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{2}{3}$ मध्ये कुनै एउटा x को मान राख्दा बहुपदीयको मान शून्य आउँछ ।

(ग) यसरी चलराशि x को कुनै मान बहुपदीयमा राख्दा बहुपदीयको मान शून्य आएपछि सङ्क्षिप्त भाग विधि प्रयोग गरेर भागफल $q(x)$ निकाल्नुहोस् ।

(घ) डिग्री 2 भएको भागफल $q(x)$ निकालिसकेपछि यसलाई खण्डीकरण गर्नुहोस् ।

(ङ) त्यसपछि बहुपदीय $f(x)$ को तीनओटै गुणनखण्डहरूसँगै लेख्नुहोस् ।

उदाहरण 1

खण्डीकरण गर्नुहोस् : $x^3 - x^2 - 10x - 8$

समाधान

यहाँ, बहुपदीय $f(x) = x^3 - x^2 - 10x - 8$ छ ।

अब, आनुपातिक मूल साध्यबाट,

सम्भावित मूलहरू $x = \pm \dfrac{a_0 \text{ का गुणनखण्ड}}{a_n \text{ का गुणनखण्ड}} = \pm \dfrac{8 \text{ का गुणनखण्ड}}{1 \text{ का गुणनखण्ड}} = \pm \dfrac{1,2,4,8}{1}$ हुन्छन् ।

तसर्थ, सम्भावित आनुपातिक गुणनखण्डहरू : $x = \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$

अब $f(-1) = x^3 - x^2 - 10x - 8 = (-1)^3 - (-1)^2 - 10(-1) - 8$

$= -1 - 1 + 10 - 8 = 0$

तसर्थ, बहुपदीय $f(x) = x^3 - x^2 - 10x - 8$ को एउटा गुणनखण्ड $(x + 1) = (x - (-1))$ हो ।

अब, सङ्क्षिप्त भाग विधिबाट

-1	1	-1	-10	-8
		-1	2	8
	1	-2	-8	0

यहाँ, $q(x) = x^2 - 2x - 8$

$= x^2 - (4 - 2)x - 8$

$= x^2 - 4x + 2x - 8$

$= x(x - 4) + 2(x - 4)$

$= (x - 4)(x + 2)$

अतः बहुपदीय $f(x) = x^3 - x^2 - 10x - 8$ का गुणनखण्डरू : $(x + 1)(x + 2)(x - 4)$ हुन् ।

उदाहरण 2

समीकरण हल गर्नुहोस् : $(x - 1)(x^2 - 2x - 12) + 12 = 0$

समाधान : यहाँ,

समीकरण : $(x - 1)(x^2 - 2x - 12) + 12 = 0$

अथवा, $x^3 - 2x^2 - 12x - x^2 + 2x + 12 + 12 = 0$

अथवा, $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$

यहाँ, बहुपदीय समीकरण $x^3 - 3x^2 - 10x + 24$ छ ।

अब, आनुपातिक मूल साध्यबाट,

सम्भावित मूलहरू $x = \pm \dfrac{24 \text{ का गुणनखण्ड}}{1 \text{ का गुणनखण्ड}} = \pm \dfrac{1,2,4,8,12,24}{1}$ हुन्छन् ।

तसर्थ, सम्भावित आनुपातिक गुणनखण्डहरू : $x = \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 12, \pm 24$ हुन् ।

फेरि, अब $f(2) = (2)^3 - 3(2)^2 - 10(2) + 24 = 8 - 12 - 20 + 24 = 0$

तसर्थ, बहुपदीय $f(x) = x^3 - 3x^2 - 10x + 24$ को एउटा गुणनखण्ड $(x - 2)$ हो ।

अब, सङ्क्षिप्त भाग विधिबाट

2	1	−3	−10	24
		2	−2	−24
	1	−1	-12	0

यहाँ, $q(x) = x^2 - x - 12$

$= x^2 - (4 - 3)x - 12$

$= x^2 - 4x + 3x - 12$

$= x(x - 4) + 3(x - 4)$

$= (x - 4)(x + 3)$

अब, गुणनखण्ड साध्यबाट, $f(x) = q(x) \times d(x)$

$= (x - 4)(x + 3)(x - 2)$

अब, बहुपदीय समीकरणबाट, $f(x) = 0$

अथवा, $(x - 4)(x + 3)(x - 2) = 0$

अथवा, $x - 4 = 0$, $\therefore x = 4$

अथवा, $x + 3 = 0$, $\therefore x = -3$

अथवा, $x - 2 = 0$, $\therefore x = 2$

अतः $x = 2, -3, 4$

अभ्यास 2.3

1. बहुपदीय $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ का मूल/शून्यहरू 1, –1, –2, 2, –3, 3 हुन् कि होइनन्, परीक्षण गरी गुणनखण्डहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।
2. शून्यहरू 2, 4 र 6 भएको बहुपदीय $f(x)$ निकाल्नुहोस् ।
3. **खण्डीकरण गर्नुहोस् :**

   (क) $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$
   (ख) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12$
   (ग) $x^3 - 8x^2 + 19x - 12$
   (घ) $(x + 2)(x^2 - 11x + 48) - 120$
   (ङ) $(x - 3)(3x^2 - x^2 - 10x + 2) - 10$
4. **समीकरण हल गर्नुहोस् :**

   (क) $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$
   (ख) $2x^3 + 3x^2 - 11x - 6 = 0$
   (ग) $x^3 + 26x = 9x^2 + 24$
   (घ) $x^3 - 4x^2 = 17x - 60$
   (ङ) $(x + 4)(x^2 - x - 14) + 16 = 0$
   (च) $(x - 3)(3x^2 - 10x + 2) = 10$

उत्तर

1. बहुपदीय $f(x)$ का शून्यहरू 1, 2 र 3 हुन् । त्यसैले बहुपदीय $f(x)$ का गुणनखण्डहरू $(x-2)(x-3)(x-4)$ हुन् ।
2. $x^3 - 12x^2 - 10x - 48$
3. (क) $(x+2)(x+3)(x+4)$ (ख) $(x+2)(x-2)(x-3)$ (ग) $(x-1)(x-2)(x-4)$ (घ) $(x-2)(x-3)(x-4)$ (ङ) $(x-1)(x-4)(3x-4)$
4. (क) $(2, -3, 4)$ (ख) $(2, -3, \frac{-1}{2})$ (ग) $(2, 3, 4)$ (घ) $(3, -4, 5)$ (ङ) $(-2, 4, -5)$ (च) $(1, 4, \frac{4}{3})$

पाठ 3

रेखीय योजना (Linear Programming)

3.1 परिचय (Introduction)

अधिकतम नाफा र न्यूनतम लागतको अनुमान गर्ने कार्य एक नियमित कार्य हो । यसका लागि प्रयोग हुने विभिन्न विधिमध्ये एक विधि रेखीय योजना हो । रेखीय योजनाको अवधारणा रसियन गणितज्ञ Leonid Vitalyevich Kantorovich ले सन् 1939 मा विकास गरेका हुन् । उनले यस अवधारणाको विकास दोस्रो विश्व युद्धमा सीमित स्रोतसाधनका बिचमा खर्च कटौतीका साथ युद्ध जित्ने रणनीतिका लागि प्रयोग गरेका थिए । यस अवधारणालाई सन् 1975 मा अमेरिकन गणितीय अर्थशास्त्री George B. Dantzig ले अमेरिकन सेना र युद्धका क्रममा स्रोतहरूको अधिकतम उपयोगका लागि थप विकास गरेका कारण उनलाई रेखीय योजनाको पिता भनिन्छ । रेखीय योजनाको प्रयोग व्यापार, अर्थशास्त्र, इन्जिनियरिङ, यातायात, उद्योग, उत्पादन, डिजाइनिङलगायत विविध क्षेत्रमा प्रयोग गरिन्छ ।


L.V. Kantorovich George B. Dantzig

3.2 रेखीय असमानताहरू (Linear Inequalities)

क्रियाकलाप 1

तलका कथनहरूलाई गणितीय वाक्यमा लेख्न सकिन्छ ? यदि गणितीय वाक्यमा लेख्न सकिन्छ भने के यिनीहरूलाई लेखाचित्रमा पनि देखाउन सकिन्छ, छलफल गर्नुहोस् :

(क) सुरेशलाई घरबाट स्कुल आइपुग्न बढीमा 2 घण्टा लाग्छ ।

(ख) नेपाली नागरिकले नागरिकता प्राप्त गर्न उसको उमेर कम्तीमा 16 वर्षको हुनुपर्छ ।

(ग) रूपेशले आफूसँग भएको रु. 750 बाट रु. 15 पर्ने कलम र रु. 25 पर्ने कापी अधिकतम कति कतिओटा किन्न सक्छन् होला ?

माथिको (क) कथनमा सुरेशलाई घरबाट स्कुल आइपुग्न लाग्ने समयलाई x ले जनाउँदा यस कथनलाई गणितीय वाक्यमा $x \le 2$ लेख्न सकिन्छ । त्यस्तै (ख) कथनमा नेपाली नागरिकले नागरिकता प्राप्त गर्ने उमेरलाई x ले जनाउँदा यस कथनलाई गणितीय वाक्यमा $x \ge 16$ लेख्न सकिन्छ । माथिका दुईओटा अवस्थामा एउटा मात्र चलराशि भएकाले यी दुबै असमानताहरू रेखीय असमानताहरू हुन् । यसरी नै माथिको (ग) कथनमा कलम र कापीको सङ्ख्यालाई क्रमशः x र y मान्दा दिइएको समस्यालाई असमानताका रूपमा $15x + 25y \le 750$ लेख्न सकिन्छ । एक तथा दुई चलयुक्त रेखीय असमानतालाई लेखाचित्रमा देखाउँदा निम्नलिखित चरणहरू अपनाउनुपर्छ :

एक तथा दुई चलयुक्त रेखीय असमानतालाई लेखाचित्रमा देखाउन प्रयोग गरिने चरणहरू :

चरण 1 : दिइएको रेखीय असमानतालाई समीकरणमा बदल्नुपर्छ ।

चरण 2 : असमानतालाई समीकरणमा बदलिसकेपछि बन्ने रेखालाई ग्राफमा देखाउनुपर्छ । यदि $>$ वा $<$ चिह्न भएमा विच्छेदित रेखा (dotted line) मा देखाउनुपर्छ र यदि $\geq$ वा $\leq$ चिह्न भएमा ठोस रेखा (solid line) ले देखाउनुपर्छ ।

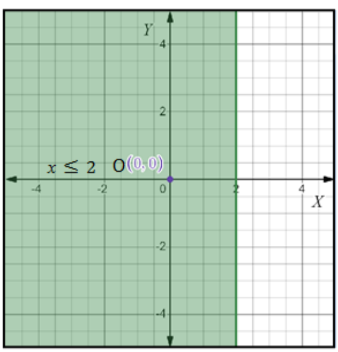
चरण 3 : दिइएको असमानताको हल क्षेत्र छुट्याउन सरल रेखामा नपर्ने एउटा परीक्षण विन्दुलाई दिइएको असमानतामा राख्नुपर्छ । जस्तै : (0, 0) लाई $2x + y \leq 5$ मा राख्दा $0 \leq 5$ (सत्य) भयो ।

चरण 4 : परीक्षण विन्दु दिइएको असमानतामा राख्दा गणितीय वाक्य सत्य भएमा उक्त असमानताको हल क्षेत्र परीक्षण विन्दु भएको क्षेत्रतिर पर्छ भने असत्य भएमा उक्त असमानताको हल क्षेत्र परीक्षण विन्दु भएको क्षेत्रको विपरीततिर पर्छ ।

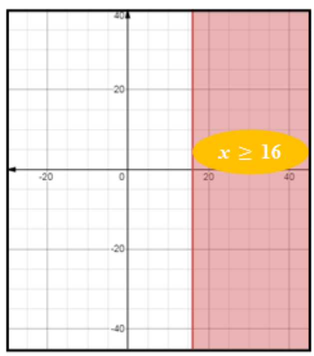
चरण 5 : ग्राफमा परीक्षण विन्दुको सत्य अवस्थाले नै दिइएको असमानताको ग्राफलाई जनाउने भएकाले हल क्षेत्रलाई छाया पारेर देखाउनुपर्छ ।

माथि छलफल गरिएका तीनओटा रेखीय असमानतालाई लेखाचित्रमा निम्नानुसार देखाउन सकिन्छ :

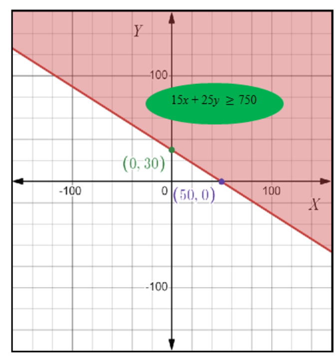
(क) $x \leq 2$ को लेखाचित्र



(ख) $x \geq 16$ को लेखाचित्र



(ग) $15x + 25y \geq 750$ को लेखाचित्र



उदाहरण 1

दिइएका असमानताहरूलाई लेखाचित्रमा देखाउनुहोस् :

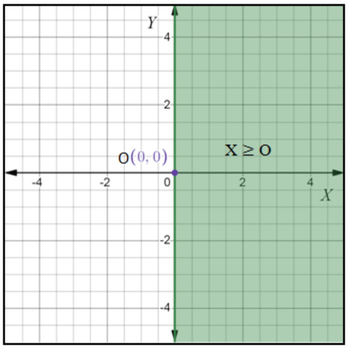
(क) $x \geq 0$ (ख) $x \leq 0$ (ग) $y \geq 0$ (घ) $y \leq 0$

(ङ) $x > -1$ (च) $x < 2$ (छ) $2x + 3y \leq 6$

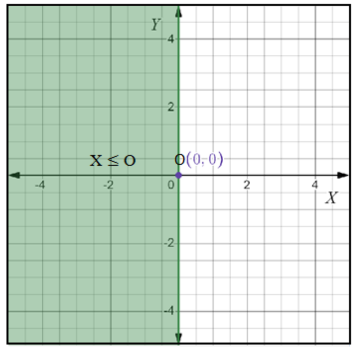
समाधान

यहाँ, दिइएका एक चलयुक्त रेखीय असमानताहरूको लेखाचित्र उक्त असमानताले दिने सरल रेखाले X- अक्ष वा Y- अक्षमा काट्ने विन्दुमा सरल रेखा खिचेर उक्त असमानताले दिने क्षेत्रतर्फ लेखाचित्रमा छाया पारी देखाइएको छ ।

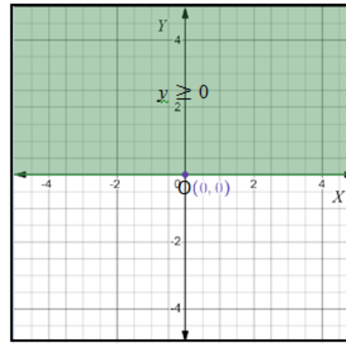
(क) $x \geq 0$ को लेखाचित्र



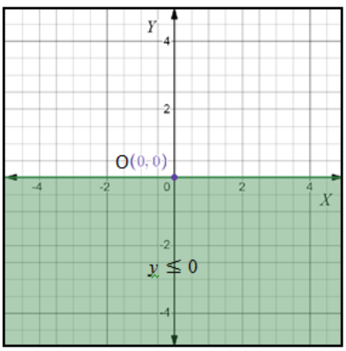
(ख) $x \leq 0$ को लेखाचित्र



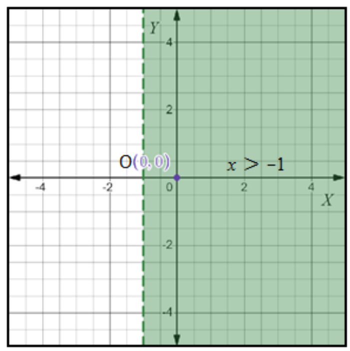
(ग) $y \geq 0$ को लेखाचित्र



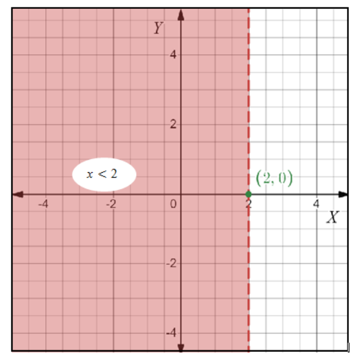
(घ) $y \leq 0$ को लेखाचित्र



(ङ) $x > -1$ लेखाचित्र



(च) $x < 2$ को लेखाचित्र



अब, दिइएका दुई चलयुक्त रेखीय असमानताहरूलाई लेखाचित्रमा देखाउन उक्त असमानतासँग सम्बन्धित सीमारेखाको समीकरण लिई उक्त रेखामा पर्ने दुई विन्दु पत्ता लगाएर सरल रेखा खिच्नुपर्छ । दिइएको असमानतामा कुनै परीक्षण विन्दु राखेर दिइएको असमानता मान्य हुने क्षेत्रतर्फ लेखाचित्रमा छाया पारी देखाइनुपर्छ ।

(छ) $2x + 3y \leq 6$

यहाँ, असमानता : $2x + 3y \leq 6$ सँग सम्बन्धित सीमा रेखाको समीकरण

$$2x + 3y = 6 \qquad \text{... (i)}$$

समीकरण (i) लाई ग्राफमा खिच्न उक्त रेखालाई मान्य हुने कुनै दुई विन्दुहरू पत्ता लगाऔँ ।

यदि $x = 0$ भए $y = 2$

यदि $y = 0$ भए $x = 3$

x	0	3
y	2	0

तसर्थ, विन्दुहरू (0, 2) र (3, 0) भएर जाने रेखा $2x + 3y = 6$ को लेखाचित्र खिचौँ । असमानतामा $\leq$ चिह्न भएकाले रेखा (i) को ठोस रेखा खिचौँ ।

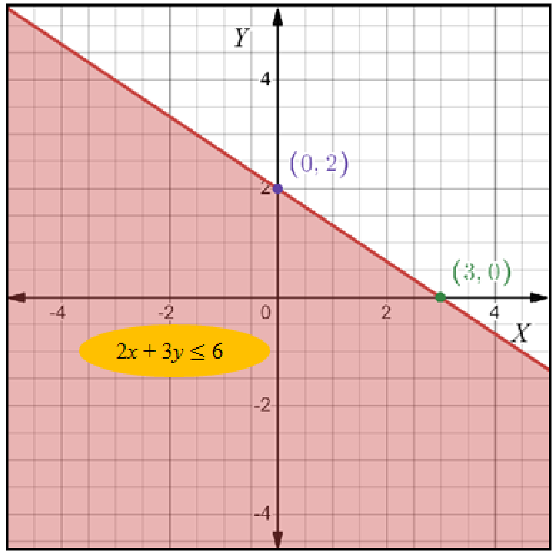
अब, असमानता : $2x + 3y \leq 6$ जनाउने क्षेत्र रेखा (I) को कतापट्टि पर्छ भनी पत्ता लगाउन परीक्षण विन्दु O(0, 0) लाई असमानता : $2x + 3y \leq 6$ मा राख्दा :

$2 \times 0 + 3 \times 0 \leq 6$

अथवा, $0 \leq 6$ जुन सत्य हो ।

यसरी, परीक्षण विन्दु O(0, 0) लाई असमानता : $2x + 3y \leq 6$ मा राख्दा सत्य भएकाले उक्त असमानताको हल क्षेत्र परीक्षण विन्दु (यहाँ, उद्‍गमविन्दु) O(0, 0) भएको क्षेत्रतर्फ पर्छ ।

तसर्थ, दिइएको असमानता $2x + 3y \leq 6$ को हलक्षेत्र रेखा $2x + 3y = 6$ को परीक्षण विन्दु O(0, 0) तिरको क्षेत्र पर्ने भएकाले सो क्षेत्रतर्फ छाया पारौँ जसलाई सँगैको लेखाचित्रमा देखाइएको छ ।



3.3 रेखीय असमानता प्रणाली (System of Linear Inequalities)

उदाहरण 1

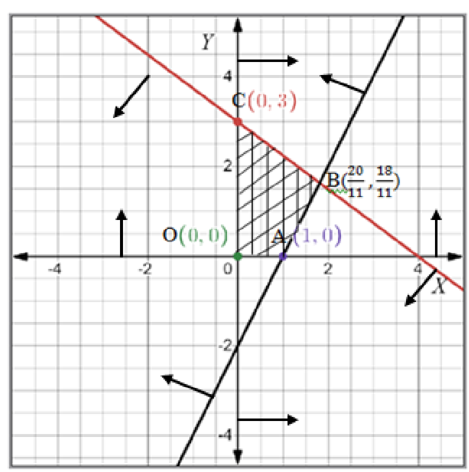
दिइएका असमानताहरूलाई लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् । ती असमानताहरूले दिने एउटा संयुक्त क्षेत्र बन्छ भने यस क्षेत्रलाई के भनिन्छ होला, उक्त क्षेत्रलाई छाया पारी छलफल गरेर निष्कर्ष निकाल्नुहोस् :

$3x + 4y \leq 12$, $2x - y \leq 2$, $x \geq 0$ and $y \geq 0$

दिइएका असमानताहरू: $3x + 4y \leq 12$, $2x - y \leq 2$, $x \geq 0$ र $y \geq 0$ लाई लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्दा असमानताहरूको संयुक्त क्षेत्र तलको लेखाचित्रमा छाया पारेर देखाए जस्तै क्षेत्र आउँछ ।

x	0	4
y	–2	0

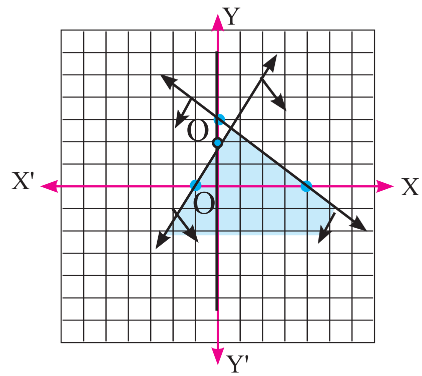
x	0	4
4	3	0



माथिका सबै असमानताको छाया पारिएको संयुक्त क्षेत्र ABCO नै असमानताको साझा हल क्षेत्र (feasible region) हो । यसरी दुई वा दुईभन्दा बढी रेखीय असमानतालाई एउटै लेखाचित्रमा देखाउँदा साझा हल क्षेत्र प्राप्त भएमा यस्तो हल क्षेत्र उन्नतोदर बहुभुज क्षेत्र (convex polygonal region) बन्छ । यसलाई नै रेखीय असमानता प्रणाली (system of linear inequalities) भनिन्छ । यस रेखीय असमानता प्रणालीको साझा हल क्षेत्रको शीर्षविन्दुहरू दिइएका सबै रेखीय असमानताहरूमा मान्य हुन्छ । यसका साथै रेखीय असमानता प्रणालीको साझा हल क्षेत्रबाट अधिकतम र न्यूनतम मान पनि पत्ता लगाउन सकिन्छ ।

दुई वा दुईभन्दा बढी रेखीय असमानताहरूलाई एउटै लेखाचित्रमा देखाउँदा उन्नतोदर बहुभुज आकारको साझा हल क्षेत्रलाई रेखीय असमानता प्रणाली भनिन्छ । यस रेखीय असमानता प्रणालीको साझा हल क्षेत्रको शीर्षविन्दुहरू दिइएका सबै रेखीय असमानताहरूमा मान्य हुन्छ ।

उदाहरण 2



दिइएको लेखाचित्रमा छाया पारिएको क्षेत्रले जनाउने असमानताहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, दिइएको ग्राफबाट सीमा रेखा (boundary line) AB का दुई विन्दुहरू A(–1, 0) र B(0, 2) र विभाजक रेखा CD का दुई विन्दुहरू C(0, 3) र D(4, 0) छन् ।

AB भएर जाने रेखाको समीकरण

$$\frac{x}{-1} + \frac{y}{2} = 1$$

$$2x - y = 2$$

∴ विभाजक रेखा AB को समीकरण $2x - y = -2$ हुन्छ ।

अब, हल क्षेत्रमा पर्ने कुनै विन्दु O(0, 0) परीक्षण विन्दुका रूपमा लिँदा

CD भएर जाने रेखाको समीकरण

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$$

$$3x + 4y = 12$$

∴ विभाजक रेखा CD को समीकरण $3x + 4y = 12$ हुन्छ ।

अब, हल क्षेत्रमा पर्ने कुनै विन्दु O(0, 0) परीक्षण विन्दुका रूपमा लिँदा

$3x + 4y = 3 \times 0 + 4 \times 0 = 0 < 12$

∴ आवश्यक असमानता $3x + 4y \leq 12$ हुन्छ ।

अत: आवश्यक असमानताहरू : $2x - y \geq -2$ र $3x + 4y \leq 12$ हुन्छन् ।

3.4 रेखीय योजनाको समस्याका समाधान (Solution of Linear Programming Problems)

रेखीय योजना विधि विभिन्न खालका व्यापारिक र औद्योगिक समस्याहरू समाधान गर्नका लागि प्रयोग गरिन्छ । यसको प्रयोग उद्योग, व्यापार, व्यवसायहरूमा लगानी तथा उत्पादन लागत कम गर्ने र नाफा धेरै गर्ने उद्देश्यले स्रोत, साधन एवम् पुँजी परिचालन गरिन्छ । रेखीय योजनामा लागत न्यूनतम (minimize) तथा उत्पादन र नाफा अधिकतम (maximize) गर्ने प्रयास गरिन्छ । रेखीय योजनामा कुनै रेखीय फलन (linear function) को निश्चित सर्तहरू (constraints) दिइएको अवस्थामा अधिकतम र न्यूनतम मान निकालिन्छ । रेखीय योजनासम्बन्धी समस्याहरूमा अधिकतम र न्यूनतम मान निकाल्नुपर्ने रेखीय फलनलाई उद्देश्य फलन (objective function) भनिन्छ र असमानताका रूपमा व्यक्त अवस्थाहरूलाई सर्त (constraints) भनिन्छ ।

रेखीय योजनासम्बन्धी समस्याहरू हल गर्ने दुईओटा विधि छन् । ती हुन् : ग्राफ विधि र सिम्प्लेक्स विधि । यहाँ ग्राफ विधिबाट मात्र रेखीय योजनाका समस्याहरू हल गरिन्छ । ग्राफ विधिबाट रेखीय योजनाका समस्याहरू समाधान गर्न तलका चरणहरूको प्रयोग गरिन्छ :

रेखीय योजनाका समस्याहरू समाधान गर्न प्रयोग गरिने चरणहरू

चरण 1 : दिइएका रेखीय असमानताहरूलाई एउटै ग्राफमा खिच्नुपर्छ ।

चरण 2 : सबै असमानताहरूको साझा हल क्षेत्र (Feasible region) पत्ता लगाउनुपर्छ ।

चरण 3 : साझा हल क्षेत्र एक बहुभुज हुन्छ, सो बहुभुजका शीर्षविन्दुहरूको निर्देशाङ्क ग्राफबाट पत्ता लगाई उद्देश्य फलनमा राख्नुपर्छ ।

चरण 4 : उद्देश्य फलनलाई अधिकतम गर्नुपर्ने भएमा अधिकतम मान र न्यूनतम गर्नुपर्ने भएमा न्यूनतम मान पत्ता लगाउनुपर्छ ।

उदाहरण 3

फलन : $Z = 10x + 12y$ को निम्नलिखित अवस्थामा अधिकतम र न्यूनतम मान निकाल्नुहोस् :

$x + 2y \le 12,\ 3x + 2y \le 24,\ x \ge 0,\ y \ge 0$

समाधान : यहाँ,

दिइएका फलन : $Z = 10x + 12y$

असमानताहरू : $x + 2y \le 12,\ 3x + 2y \le 24,\ x \ge 0,\ y \ge 0$

दिइएका असमानतालाई समीकरणमा बदल्दा

$x + 2y = 12$ ... (i)

$3x + 2y = 24$ ... (ii)

समीकरण (i) लाई ग्राफमा खिच्न उक्त रेखालाई मान्य हुने कुनै दुई विन्दुहरू पत्ता लगाउँदा,

x	0	12
y	6	0

तसर्थ, रेखा $x + 2y = 12$ विन्दुहरू (0, 6) र (12, 0) भएर जान्छ ।

अब, असमानता : $x + 2y \leq 12$ ले दिने क्षेत्र पत्ता लगाउन परीक्षण विन्दु O(0, 0) लाई असमानता : $x + 2y \leq 12$ मा राख्दा

$0 + 2 \times 0 \leq 12$

अथवा, $0 \leq 12$ जुन सत्य छ ।

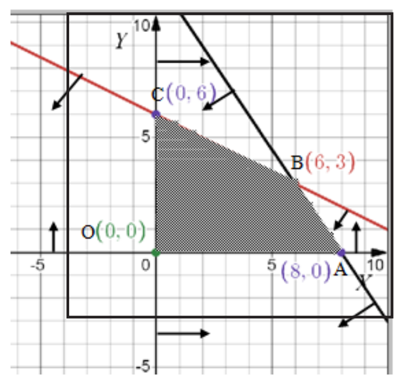
यसरी, परीक्षण विन्दु O(0, 0) लाई असमानता : $x + 2y \leq 12$ मा राख्दा सत्य भएकाले उक्त असमानताको हल क्षेत्र परीक्षण विन्दु O(0, 0) भएको क्षेत्रतर्फ पर्छ ।

फेरि, समीकरण (ii) लाई ग्राफमा खिच्न उक्त रेखालाई मान्य हुने कुनै दुई विन्दुहरू पत्ता लगाउँदा

x	0	8
y	12	0

तसर्थ, रेखा $3x + 2y = 24$ विन्दुहरू (0, 12) र (8, 0) भएर जान्छ ।
अब, असमानता : $3x + 2y \leq 24$ ले दिने क्षेत्र रेखा (ii) को कतापट्टि पर्छ भनी पत्ता लगाउन परीक्षण विन्दु (0, 0) लाई असमानता : $3x + 2y \leq 24$ मा राख्दा : $3 \times 0 + 2 \times 0 \leq 24$

अथवा, $0 \leq 24$ जुन सत्य हो ।
यसरी, परीक्षण विन्दु (0, 0) लाई असमानता $3x + 2y \leq 24$ मा राख्दा सत्य भएकाले उक्त असमानताको हल क्षेत्र परीक्षण विन्दु O(0, 0) भएको क्षेत्रतर्फ पर्ने भएकाले सो क्षेत्रतर्फ तीर चिह्नले देखाऔँ ।
त्यसरी नै असमानताहरू $x \geq 0$ र $y \geq 0$ ले क्रमशः Y - अक्षभन्दा दायाँतर्फ र X - अक्षभन्दा माथि तिर भएकाले सोहीतर्फ क्रमशः तीर चिह्नले देखाउँदा,



यसरी माथिका सबै असमानताहरूको साझा हल क्षेत्र सँगैको लेखाचित्रमा देखाएबमोजिम छाया पारिएको भाग बहुभुज ABCO हो । बहुभुज ABCO को शीर्षविन्दुहरूको निर्देशाङ्क O(0, 0), A(8, 0), B(6, 3) र C(0, 6) छ ।

अब, $Z = 10x + 12y$ मा शीर्षविन्दुहरूको निर्देशाङ्क O(0, 0), A(8, 0), B(6, 3) र C(0, 6) क्रमशः राख्दा :

O(0, 0) मा $Z = 10 \times 0 + 12 \times 0 = 0$

A(8, 0) मा $Z = 10 \times\times 8 + 12 \times 0 = 80$

B(6, 3) मा $Z = 10 \times 6 + 12 \times 3 = 96$

C(0, 6) मा $Z = 10 \times 0 + 12 \times 6 = 72$

अतः Z को अधिकतम मान 96 हुन्छ, जुन विन्दु B(6, 3) मा पर्छ र न्यूनतम मान 0 हुन्छ जुन विन्दु O(0, 0) मा पर्छ ।

अभ्यास 3

1. दिइएका प्रश्नहरूको उपयुक्त विकल्पमा ठिक चिह्न (✓) लगाउनुहोस् :

(क) हरिले एक दिनमा रु. 600 भन्दा बढी कमाउँछ । हरिको एक दिनको कमाइलाई x मान्दा तलका मध्ये कुन असमानता सही छ ?

a. $x > 600$ b. $x \geq 600$ c. $x < 600$ d. $x \leq 600$

(ख) काठमाडौँको जाडो मौसममा तापक्रम कम्तीमा -3°C हुने गर्छ । काठमाडौँको जाडो मौसमको तापक्रमलाई x मान्दा दिइएको कथनलाई तलको कुन असमानताले जनाइन्छ ?

a. $x > -3^\circ$C b. $x \geq -3^\circ$C c. $x < -3^\circ$C d. $x \leq -3^\circ$C

(ग) असमानता $2x - 3y > 5$ मा तलका मध्ये कुन विन्दु मान्य हुन्छ ?

a. (0, 0) b. (1, 1) c. (4, 3) d. (5, 1)

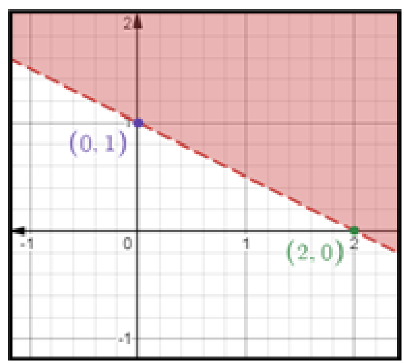
(घ) उद्देश्य फलन : $Z = 3x + 4y$ भए हलक्षेत्रका विन्दुहरू O(0, 0), A(9, 0), B(7, 3) र C(0, 8) मध्ये कुन विन्दुमा अधिकतम मान होला ?

a. विन्दु O(0, 0) b. A(9, 0) c. B(7, 3) d. C(0, 8)

(ङ) दिइएको लेखाचित्रलाई जनाउने असमानता तलका मध्ये कुन होला ?

a. $x + y > 2$ b. $x + 2y > 2$

c. $2x + y < 2$ d. $x + 2y > 2$



2. दिइएका असमानताहरूको लेखाचित्र खिच्नुहोस् :

(क) $x + y \geq 3$ (ख) $x - y \geq 0$

(ग) $2x + 3y \leq 6$ (घ) $3x + 4y \geq 12$

(ङ) $x - 2y \geq 3$ (च) $3x - 2y \geq 4$

3. दिइएका असमानता पद्धतिहरूको लेखाचित्र खिची साझा हल क्षेत्र पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) $x + 2y \leq 6, x \geq 0$ (ख) $2x - y \geq 4, y \geq 0$ (ग) $x + y \leq 1, x\_y \geq 1$

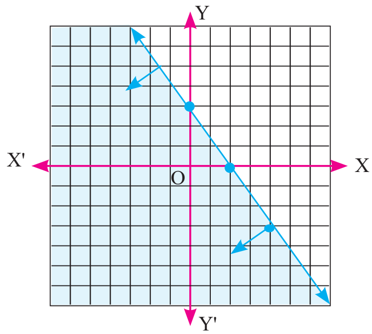
(घ) $3x + 4y \leq 12, 2x - y \leq 0, x - y \leq 2,\ x \geq 0$ र $y \geq 0$

(ङ) $2x + 3y \leq 6, 3x - y \leq 0, x \geq 0$ र $y \geq 0$

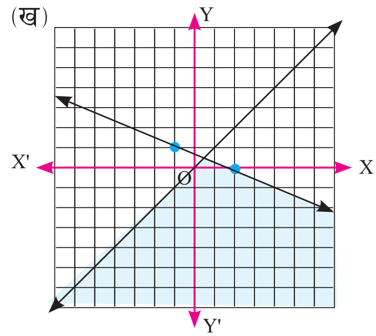
(च) $x + y \leq 2, 2x - 3y \leq 6, x \geq 0$ and $y \leq 2$

4. **दिइएको लेखाचित्रबाट छाया पारिएको क्षेत्रले जनाउने असमानताहरू पत्ता लगाउनुहोस् :**

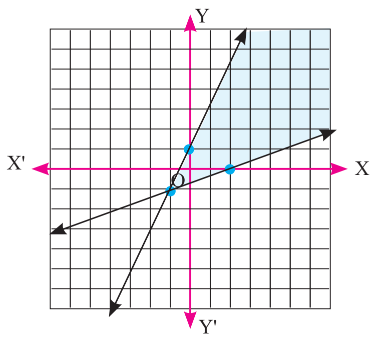
(क)



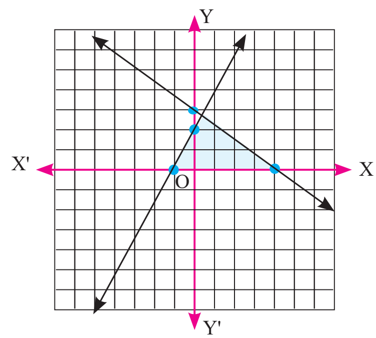
(ख)



(ग)



(घ)



5. **निम्नलिखित अवस्थामा अधिकतम र न्यूनतम मान निकाल्नुहोस् :**

(क) फलन : $Z = 3x + 2y$

$x + y \geq 6$

$x - y \leq 4$

$x \geq 0, y \geq 0$

(ख) फलन : $P(x, y) = 3x + 5y$

$x + y \leq 6$

$x - y \geq 2$

$x \geq 0, y \geq 0$

(ग) फलन : $Z = 3x + 5y$

$x - 2y \leq 1$

$x + y \leq 4$

$x \geq 0, y \geq 0$

(घ) फलन : $F = 3x + 2y$

$x - 2y \leq 2$

$x + 2y \leq 8$

$x \geq 0, y \geq 0$

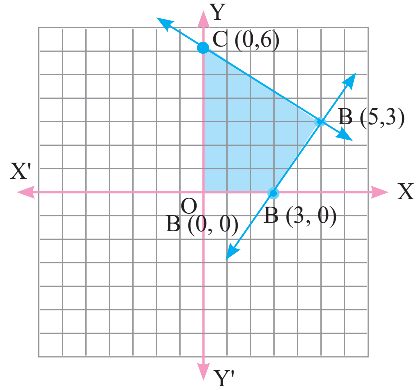
(ङ) फलन : $F(x, y) = 2x + y$

$x + 2y \leq 10$

$x + y \geq 1$

$y \leq 4$

6. सँगैको लेखाचित्रबाट छाया पारिएको भागले जनाउने चारओटा असमानताहरू पत्ता लगाउनुहोस् । ती असमानताहरूलाई मान्य हुने मानहरूबाट उद्देश्य फलन : $F(x, y) = 20x + 30y$ को अधिकतम र न्यूनतम मान निकाल्नुहोस् ।



उत्तर

1. (क) a (ख) b (ग) d (घ) c (ङ) b

2–3. उत्तरहरू शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

4. (क) $3x + 2y \leq 6$ (ख) $x + 2y \leq 0, x - y \leq 0$

(ग) $x - 2y \leq 1, x - 3y \leq 2$ (घ) $2x - y \geq -2, 3x + 4y \leq 12, y \geq 0$

5. (क) अधिकतम $Z = 17$ विन्दु $(5, 1)$ र न्यूनतम $Z = 0$ विन्दु $(0, 0)$

(ख) अधिकतम $P = 22$ विन्दु $(4, 2)$ र न्यूनतम $P = 6$ विन्दु $(2, 0)$

(ग) अधिकतम $Z = 14$ विन्दु $(3, 1)$ र न्यूनतम $Z = 0$ विन्दु $(0, 0)$

(घ) अधिकतम $F = 18$ विन्दु $(5, \frac{3}{2})$ र न्यूनतम $F = 0$ विन्दु $(0, 0)$

(ङ) अधिकतम $F = 20$ विन्दु $(10, 0)$ र न्यूनतम $F = -2$ विन्दु $(-3, 4)$

6. $3x - 2y \leq 9, 3x + 5y \leq 30, x \geq 0, y \geq 0$

अधिकतम $F = 14$ विन्दु $(5, 3)$ र न्यूनतम $F = 0$ विन्दु $(0, 0)$

पाठ 4 वर्ग समीकरण (Quadratic Equation)

4.1 परिचय (Introduction)

चलराशिको घाताङ्क 2 भएको समीकरणलाई वर्ग समीकरण भनिन्छ । बीजगणितको विकासको प्रवर्तकका रूपमा नवौँ शताब्दीका पर्सियन ज्योतिषशास्त्री, गणितज्ञ तथा शोधकर्ता Al-Khwarizmi (780–850 AD) लाई मानिन्छ । तसर्थ Al-Khwarizmi लाई बीजगणितका पिताका रूपमा लिइँदै आइएको छ । उनलाई वर्ग समीकरणको हल गर्ने तरिकाको विकास तथा रेखीय तथा वर्ग समीकरणलाई व्यवस्थित र लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्ने पहिलो गणितज्ञका रूपमा लिइन्छ । Al-Khwarizmi ले आफ्नो पुस्तक *Kitab al-Jabr* मा हिन्दु अरेबिक अङ्कलाई Algorithm शब्दका रूपमा प्रथम पटक प्रस्तुत गर्नुका साथै रेखीय तथा वर्ग समीकरणलाई व्यवस्थित रूपमा लेखिएको उक्त पुस्तकलाई पछि बीजगणितको नाम दिइयो ।


Al-Khwarizmi

समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ लाई एक चलयुक्त साधारण वर्ग समीकरण भनिन्छ । समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ ले दिने लेखाचित्र $\cup$ वा $\cap$ आकारको हुन्छ जसलाई पाराबोला (Parabola) भनिन्छ । वर्ग समीकरणको लेखाचित्रको आकार वास्तविक सङ्ख्याहरू a, b र c को मानमा भर पर्छ । पाराबोलाको दिशा परिवर्तन हुने विन्दुलाई घुमेको विन्दु (Turning Point) भनिन्छ । पाराबोलाको घुमेको विन्दु नै पाराबोलाको शीर्षविन्दु (Vertex) हो ।

4.2 वर्ग फलन $y = ax^2 + bx + c$ लाई $y = a(x - h)^2 + k$ का रूपमा रूपान्तरण (Conversion of Quadratic Equation $y = ax^2 + bx + c$ into $y = a(x - h)^2 + k$)

वर्ग फलन $y = ax^2 + bx + c$ लाई $y = a(x - h)^2 + k$ रूपमा परिवर्तित गर्दा निम्नलिखित वर्ग पूरा गर्ने प्रक्रिया अपनाउनुपर्छ :

$$y = ax^2 + bx + c$$

अथवा, $y = a\{x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}\}$

अथवा, $y = a\{x^2 + 2.x.\frac{b}{2a} + (\frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2 + \frac{c}{a}\}$

अथवा, $y = a\{x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\}$

अथवा, $y = a\{x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{b^2 - 4ac}{4a^2})\}$

अथवा, $y = a(x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{b^2 - 4ac}{4a})$

अथवा, $y = a\{(x - (-\frac{b}{2a})\}^2 + (\frac{4ac - b^2}{4a})$ ... (i)

$$y = a(x - h)^2 + k \qquad \dots \text{(ii)}$$

अब, समीकरण (i) लाई समीकरण (ii) सँग तुलना गर्दा, $h = -\frac{b}{2a}, k = \frac{4ac - b^2}{4a}$

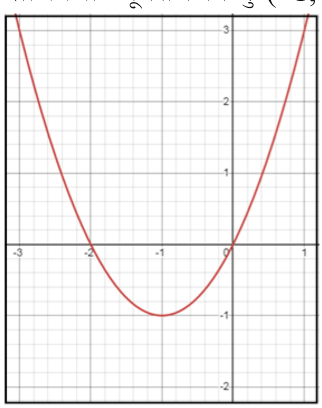
अत: पाराबोलाको शीर्षविन्दु $(h, k) = (-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a})$ र पाराबोलाको अक्ष : $h = -\frac{b}{2a}$

4.3 वर्ग फलन $y = a(x - h)^2 + k$ को लेखाचित्रको स्केच (Sketch the Graph of Quadratic Function $y = a(x - h)^2 + k$)

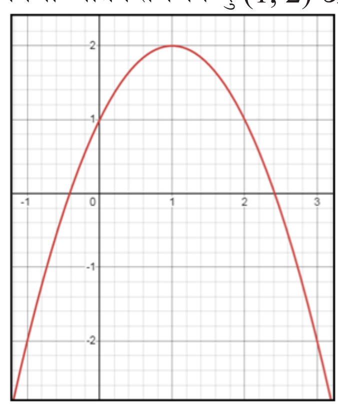
वर्ग फलन $y = a(x - h)^2 + k$ को लेखाचित्र स्केच (Sketch) गर्नका लागि पाराबोलाका तलका विशेषताहरू प्रयोग गरिन्छ :

1. पाराबोलाको आकार

वर्ग फलन $y = a(x - h)^2 + k$ मा a को मान धनात्मक $(a > 0)$ भएमा पाराबोला माथि फर्केको र न्यूनतम विन्दु हुन्छ तर अधिकतम विन्दु हुँदैन । त्यस्तै a को मान ऋणात्मक $(a < 0)$ भएमा पाराबोला तल फर्केको र अधिकतम विन्दु हुन्छ तर न्यूनतम विन्दु हुँदैन, जस्तै : पहिलो लेखाचित्रमा न्यूनतम विन्दु $(-1, -1)$ छ र दोस्रो लेखाचित्रमा अधिकतम विन्दु $(1, 2)$ छ ।



वर्ग फलन $y = -x^2 + 2x + 0$ को लेखाचित्र



वर्ग फलन $y = -x^2 + 2x + 1$ को लेखाचित्र

2. पाराबोलाको शीर्षविन्दु

पाराबोलाको शीर्षविन्दु (h, k) हुन्छ ।

3. पाराबोलाको खण्डहरू

(क) y- खण्ड : वर्ग फलन $y = a(x - h)^2 + k$ मा $x = 0$ राख्दा y- खण्ड c आउँछ ।

(ख) x- खण्ड : वर्ग फलन $y = a(x - h)^2 + k$ मा $y = 0$ राख्दा $a(x - h)^2 + k = 0$ हुन्छ । यदि यस वर्ग समीकरणका मूलहरू x_1 र x_2 भए पाराबोलाले X-अक्षका विन्दुहरू $(x_1, 0)$ र $(x_2, 0)$ मा काट्छ ।

4. पाराबोलाको अक्ष

पाराबोलाको अक्ष : $x = h$ हुन्छ । तसर्थ, पाराबोला $y = a(x - h)^2 + k$, अक्ष : $x = h$ सँग सममितीय हुन्छ ।

उदाहरण 1

वर्ग फलन : $y = x^2 - 3$ लाई $y = a(x - h)^2 + k$ का रूपमा परिवर्तन गरी लेखाचित्र स्केच गर्नुहोस् ।

समाधान

वर्ग फलन : $y = x^2 - 3$ -3 लाई $y = a(x - h)^2 + k$ का रूपमा परिवर्तन गर्दा

अत: $y = (x - 0)^2 - 3$

वर्ग फलन : $y = (x - 0)^2 - 3$ को लेखाचित्र स्केच गर्नका लागि पाराबोलाका तलका विशेषता क्रमशः प्रयोग गरिन्छ ।

1. पाराबोलाको आकार : वर्ग फलन $y = (x - 0)^2 - 3$ मा 1 धनात्मक ($a > 0$) भएकाले पाराबोला माथि फर्केको हुन्छ ।
2. पाराबोलाको शीर्षविन्दु : पाराबोलाको शीर्षविन्दु $(h, k) = (0, -3)$ हुन्छ । विन्दु $(0, -3)$ नै पाराबोलाको न्यूनतम विन्दु हो ।
3. **पाराबोलाको खण्डहरू**

   (क) y- खण्ड : वर्ग फलन $y = (x - 0)^2 - 3$ मा $x = 0$ राख्दा $y = (0 - 0)^2 - 3 = -3$ आउँछ । तसर्थ, यस अवस्थामा पाराबोलाले Y- अक्षको विन्दु $(0, -3)$ मा काट्छ ।

   (ख) x- खण्ड : वर्ग फलन $y = (x - 0)^2 - 3 = x^2 - 3$ मा $y = 0$ राख्दा,

   $x^2 - 3 = 0$

   अथवा, $x^2 = 3$

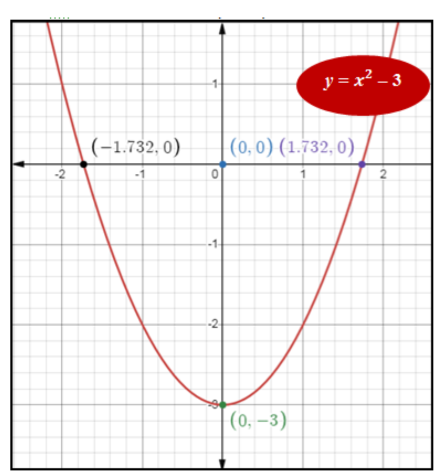
   अथवा, $x^2 = (\pm\sqrt{3})^2$

   अथवा, $x = \pm\sqrt{3}$

   अत: $x = \sqrt{3} = 1.732$ वा $-\sqrt{3} = -1.732$

   यस वर्ग समीकरणका मूलहरू 1.732 र -1.732 हुन्छन् । तसर्थ, पाराबोलाले X- अक्षका विन्दुहरू $(1.732, 0)$ र $(-1.732, 0)$ मा काट्छ ।

4. पाराबोलाको अक्ष : पाराबोलाको अक्ष, $x = 0$ वा Y= अक्ष हुने भएकाले पाराबोला $y = x^2 - 3$, उक्त रेखा $x = 0$ सँग सममितीय हुन्छ ।
5. पाराबोलाको स्केच : माथिका विशेषताका आधारमा पाराबोलाको लेखाचित्र स्केच गर्दा



उदाहरण 2

वर्ग फलन : $y = x^2 - 4x + 3$ लाई $y = a(x - h)^2 + k$ का रूपमा परिवर्तन गरी लेखाचित्र स्केच गर्नुहोस् ।

समाधान

वर्ग फलन : $y = x^2 - 4x + 3$ लाई $y = a(x - h)^2 + k$ को रूपमा परिवर्तन गर्दा

$$y = x^2 - 4x + 3 = x^2 - 2.x.2 + 2^2 - 2^2 + 3 = (x - 2)^2 - 4 + 3 = (x - 2)^2 - 1$$

अत: $y = (x - 2)^2 - 1$

वर्ग फलन: $y = (x - 2)^2 - 1$ को लेखाचित्र स्केच गर्नका लागि पाराबोलाका तलका विशेषता क्रमशः प्रयोग गर्दा

1. पाराबोलाको आकार : वर्ग फलन $y = (x - 2)^2 - 1$ मा 1 धनात्मक $(a > 0)$ भएकाले पाराबोला माथि फर्केको हुन्छ ।
2. पाराबोलाको शीर्षविन्दु : पाराबोलाको शीर्षविन्दु $(h, k) = (2, -1)$ हुन्छ । विन्दु $(2, -1)$ नै पाराबोलाको न्यूनतम विन्दु हो ।

3. पाराबोलाको खण्डहरू

(क) y- खण्ड : वर्ग फलन $y = (x - 2)^2 - 1$ मा $x = 0$ राख्दा $y = (0 - 2)^2 - 1 = (-2)^2 - 1 = 4 - 1 = 3$ आउँछ । तसर्थ, यस अवस्थामा पाराबोलाले Y- अक्षको विन्दु (0, 3) मा काट्छ ।

(ख) x-खण्ड : वर्ग फलन $y = (x - 2)^2 - 1 = x^2 - 4x + 3$ मा $y = 0$ राख्दा,

$x^2 - 4x + 3 = 0$

अथवा, $x^2 - (3 + 1)x + 3 = 0$

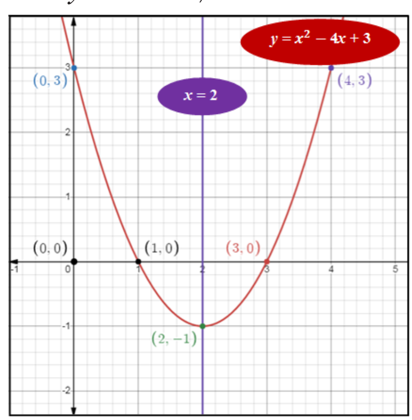
अथवा, $x^2 - 3x - 1x + 3 = 0$

अथवा, $x(x - 3) - 1(x - 3) = 0$

अथवा, $(x - 3)(x - 1) = 0$ हुन्छ ।

अत: $x = 1$ वा 3

यस वर्ग समीकरणका मूलहरू 1 र 3 हुन्छन् । तसर्थ, पाराबोलाले X- अक्षका विन्दुहरू (1, 0) र (3, 0) मा काट्छ ।



4. पाराबोलाको अक्ष : पाराबोलाको अक्ष $x = 2$ हुने भएकाले पाराबोला $y = (x - 2)^2 - 1$, उक्त रेखा $x = 2$ सँग सममितीय हुन्छ । तसर्थ, Y-अक्षको विन्दु (0, 3) को सङ्गति विन्दु (4, 3) हुन्छ ।
5. पाराबोलाको स्केच : माथिका विशेषताका आधारमा पाराबोलाको लेखाचित्र स्केच गर्दा,

उदाहरण 3

वर्ग फलन : $y = x^2 - 2x + 3$ लाई $y = a(x - h)^2 + k$ का रूपमा परिवर्तन गरी लेखाचित्र स्केच गर्नुहोस् ।

समाधान

वर्ग फलन : $y = -x^2 - 2x + 3$ लाई $y = a(x-h)^2 + k$ का रूपमा परिवर्तन गर्दा,

$$y = -x^2 - 2x + 3 = -(x^2 + 2.x - 3) = -(x^2 + 2.x.1 + 1^2 - 1^2 - 3)$$
$$= -[(x+1)^2 - 1 - 3]$$
$$= -[(x+1)^2 - 4]$$

अत: $y = -(x+1)^2 + 4$

वर्ग फलन : $y = -(x+1)^2 + 4$ को लेखाचित्र स्केच गर्नका लागि पाराबोलाका विशेषताहरू प्रयोग गर्दा

1. पाराबोलाको आकार : वर्ग फलन $y = -(x+1)^2 + 4$ मा x^2 को गुणाङ्क ऋणात्मक भएकाले पाराबोला तल फर्केको हुन्छ ।
2. पाराबोलाको शीर्षविन्दु : पाराबोलाको शीर्षविन्दु $(h, k) = (-1, 4)$ हुन्छ । विन्दु $(-1, 4)$ नै पाराबोलाको अधिकतम विन्दु हो ।

3. पाराबोलाको खण्डहरू

(क) y- खण्ड : वर्ग फलन

$y = -(x+1)^2 + 4$ मा

$x = 0$ राख्दा

$y = -(0+1)^2 + 4 = -(1)^2 + 4 = -1 + 4 = 3$ हुन्छ ।

त्यसैले, y- खण्ड 3 आउँछ । तसर्थ, यस अवस्थामा पाराबोलाले Y- अक्षको विन्दु (0, 3) मा काट्छ ।

(ख) x- खण्ड : वर्ग फलन

$y = -(x+1)^2 + 4$

$= -x^2 - 2x + 3$ मा

$y = 0$ राख्दा,

$-x^2 - 2x + 3 = 0$

अथवा, $-x^2 - (3-1)x + 3 = 0$

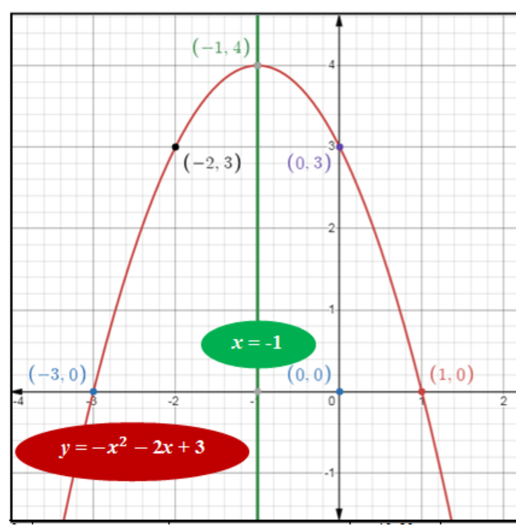
अथवा, $-x^2 - 3x + 1x + 3 = 0$

अथवा, $-x(x+3) + 1(x+3) = 0$

अथवा, $(-x+1)(x+3) = 0$ हुन्छ ।

अत: $x = 1$ वा -3

यस वर्ग समीकरणका मूलहरू 1 र -3 हुन्छन् । तसर्थ, पाराबोलाले x-अक्षका विन्दुहरू (1, 0) र (−3, 0) मा काट्छ ।



4. पाराबोलाको अक्ष : पाराबोलाको अक्ष $x = -1$ हुने भएकाले पाराबोला $y = -(x+1)^2 + 4$, उक्त रेखा $x = -1$ सँग सममितीय हुन्छ । तसर्थ, Y- अक्षको विन्दु (0, 3) को सङ्गति विन्दु (−2, 3) हुन्छ ।
5. पाराबोलाको स्केच : माथिका विशेषताका आधारमा पाराबोलाको लेखाचित्र स्केच गर्दा,

4.4 वर्ग फलन $y = x^2$ को स्थानान्तरण (Transformation of Quadratic Function $y = x^2$)

कुनै पनि वस्तुको सबै विन्दुहरूलाई एउटै दिशामा सारिन्छन् भने यस्तो स्थानान्तरणलाई त्यो वस्तुको विस्थापन भनिन्छ । सामान्यतः विस्थापन क्षितिजीय विस्थापन, ठाडो विस्थापन र संयुक्त विस्थापन गरी तीन किसिमका हुन्छन् ।

1. क्षितिजीय विस्थापन (Horizontal Transformation)

क्रियाकलाप 1

दिइएको लेखाचित्रबाट निम्नलिखित प्रश्नहरूमा छलफल गरी निष्कर्ष निकाल्नुहोस् :

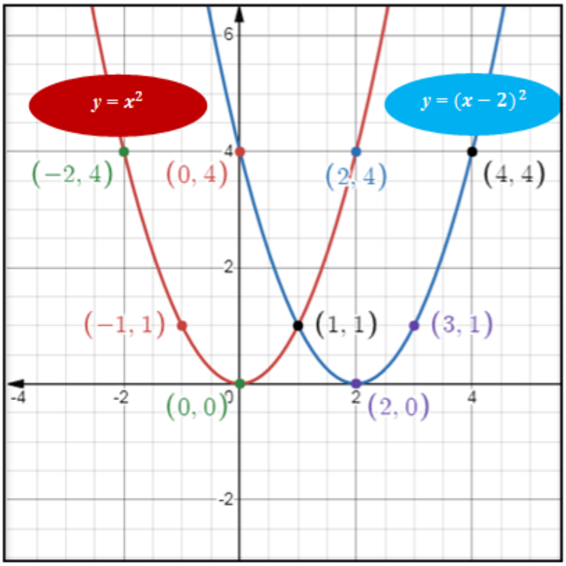
(क) लेखाचित्रमा दिइएका वर्ग फलनहरू कुन कुन छन् ?

(ख) वर्ग फलनका लेखाचित्रहरू उस्तै र उत्रै छन् ?

(ग) लेखाचित्रको पहिलो र दोस्रो वर्ग फलनका शीर्षविन्दुका निर्देशाङ्कहरू कति कति छन् ?

(घ) पहिलो वर्ग फलनको शीर्षविन्दुको निर्देशाङ्कभन्दा दोस्रो वर्ग फलनको शीर्षविन्दुको निर्देशाङ्क कति एकाइ दायाँ छ ?

(ङ) के लेखाचित्रमा दिइएका पहिलो र दोस्रो वर्ग फलनका सङ्गति विन्दुहरूको निर्देशाङ्कहरू पनि (घ) जस्तै सम्बन्ध छ ?

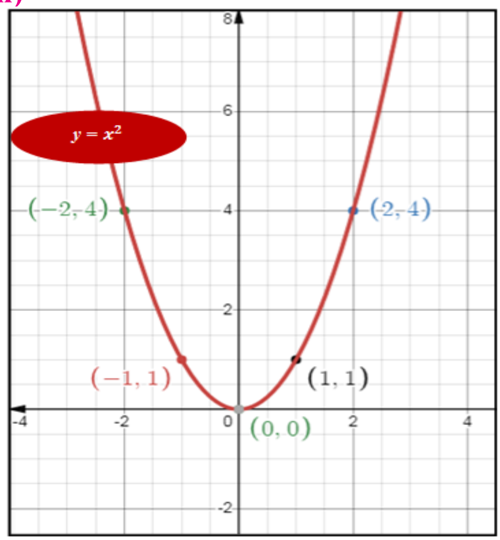


माथिको लेखाचित्रमा पहिलो वर्ग फलन $y = x^2$ र दोस्रो वर्ग फलन $y = (x-2)^2$ का वक्रहरू हुन् । माथिका दुबै वर्ग फलनका वक्रहरू उस्तै आकार र उही नापका छन् । पहिलो र दोस्रो वर्ग फलनका शीर्षविन्दुका निर्देशाङ्कहरू क्रमशः (0, 0) र (2, 0) छन् । अर्थात् पहिलो वर्ग फलनका शीर्षविन्दुका निर्देशाङ्कभन्दा दोस्रो वर्ग फलनका शीर्षविन्दुको निर्देशाङ्क 2 एकाइ दायाँ सरेको छ । त्यस्तै, विन्दु (–1, 1) को सङ्गति विन्दुको निर्देशाङ्क (1, 1) तथा विन्दु (1, 1) को सङ्गति विन्दुको निर्देशाङ्क (3, 1) पनि 2 एकाइ दायाँ सरेको छ। यसरी नै बाँकी विन्दुहरू पनि सबै क्रमशः 2 एकाइ दायाँ सरेको छन्। तसर्थ, वर्ग फलन $y = x^2$ लाई 2 एकाइ दायाँ सार्दा वर्ग फलन $y = (x-2)^2$ बनेको छ । अर्थात्, वर्ग फलन $y = x^2$ लाई 2 एकाइ दायाँ स्थानान्तरण गर्दा वर्ग फलन $y = (x-2)^2$ हुन्छ ।

विचारणीय प्रश्न : वर्ग फलन $y = x^2$ लाई 2 एकाइ बायाँ सार्दा वर्ग फलन के हुन्छ र सोको लेखाचित्र कस्तो बन्छ होला, छलफल गर्नुहोस् ।

वर्ग फलन $y = x^2$ लाई h एकाइ दायाँ सार्दा वर्ग फलन $y = (x - h)^2$ बन्छ । त्यस्तै, वर्ग फलन $y = x^2$ लाई h एकाइ बायाँ सार्दा वर्ग फलन $y = (x + h)^2$ बन्छ । वर्ग फलन $y = x^2$ लाई h एकाइ दायाँ र बायाँ क्षितिजीय स्थानान्तरण गर्दा वर्ग फलनको वक्र उही नाप र उही आकारको बन्छ ।

2. ठाडो स्थानान्तरण (Vertical Transformation)



क्रियाकलाप 2

दिइएको लेखाचित्रबाट निम्नलिखित प्रश्नहरूको उत्तर लेखी छलफल गरेर निष्कर्ष निकाल्नुहोस् :

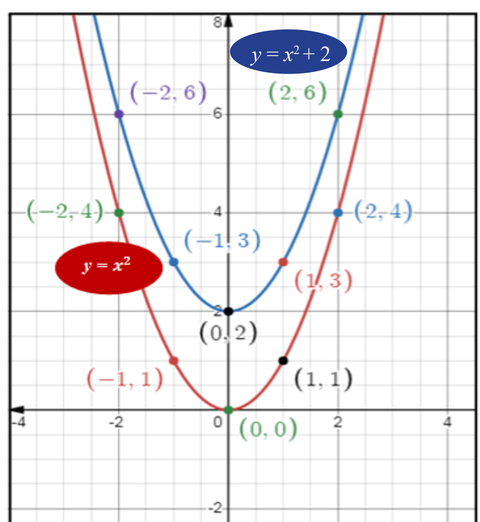
(क) दिइएको लेखाचित्रमा भएको वर्ग फलन $y = x^2$ लाई आफ्नो ग्राफ कपिमा उतार्नुहोस् ।

(ख) वर्ग फलन $y = x^2$ का शीर्षविन्दुसमेत पाँचओटा विन्दुका निर्देशाङ्कहरू 2 एकाइ माथि सार्दा बन्ने नयाँ पाँचओटा विन्दुका निर्देशाङ्कहरू लेखी एउटै लेखाचित्रमा देखाउनुहोस् ।

(ग) यसरी बनेका नयाँ पाँचओटा विन्दुहरू क्रमशः जोडेर बन्ने वक्र तयार गर्नुहोस् ।

(घ) उक्त नयाँ वक्रको नाप र आकार कस्तो बन्यो, लेख्नुहोस् ।

(ङ) उक्त नयाँ वक्रको फलन लेख्नुहोस् ।



दिइएको लेखाचित्रमा भएको वर्ग फलन $y = x^2$ लाई आफ्नो ग्राफ कपिमा उतारिसकेपछि वर्ग फलन $y = x^2$ का शीर्षविन्दुसमेत पाँचओटा विन्दुका निर्देशाङ्कहरू 2 एकाइ माथि सार्दा बन्ने नयाँ पाँचओटा विन्दुका निर्देशाङ्कहरू क्रमशः $(-2, 4)$ को सङ्गति विन्दु $(-2, 6)$, $(-1, 1)$ को सङ्गति विन्दु $(-1, 3)$, $(0, 0)$ को सङ्गति विन्दु $(0, 2)$, $(1, 1)$ को सङ्गति विन्दु $(1, 3)$ र $(2, 4)$ को सङ्गति विन्दु $(2, 6)$ हुन्छन् । यी विन्दुहरूलाई क्रमशः जोडेर बन्ने वक्र पनि वर्ग फलन $y = x^2$ जस्तै बराबर नापको माथि फर्केको छ । माथिको एउटै लेखाचित्रमा उक्त नयाँ वक्रको फलन $y = x^2 + 2$ हुन्छ । यसरी नै वर्ग फलन $y = x^2$

लाई 2 एकाइ तल सार्दा बन्ने वक्रको फलन $y = x^2 - 2$ हुन्छ । पाराबोलाको शीर्षविन्दु उद्गमविन्दु (0, 0) भएमा विस्थापन भएको पाराबोलाको शीर्षविन्दु $(0, \pm 2)$ हुन्छ ।

> वर्ग फलन $y = x^2$ लाई k एकाइ माथि विस्थापन गर्दा बन्ने वक्रको फलन $y = x^2 + k$ र तल विस्थापन गर्दा बन्ने वक्रको फलन $y = x^2 - k$ हुन्छ । विस्थापन भएको पाराबोलाको आकार र नाप $y = x^2$ को जस्तै हुन्छ ।

3. संयुक्त स्थानान्तरण (Combined Transformation)

क्रियाकलाप 3

वर्ग फलन : $y = x^2$ को लेखाचित्र खिच्नुहोस् । वर्ग फलन $y = x^2$ लाई पहिले 2 एकाइ दायाँ स्थानान्तरण र त्यसपछि 3 एकाइ माथि स्थानान्तरण गरी आउने वर्ग फलनलाई लेखाचित्रमा खिचेर छलफल गरी निष्कर्ष निकाल्नुहोस् ।

वर्ग फलन $y = x^2$ लाई लेखाचित्रमा देखाउन चर x का विभिन्न मानहरू फलन $y = x^2$ मा राख्दा चर y का विभिन्न मानहरू आउँछन् । तलको तालिका पूरा गरी वर्ग फलन $y = x^2$ ले दिने लेखाचित्र खिच्नुहोस् ।

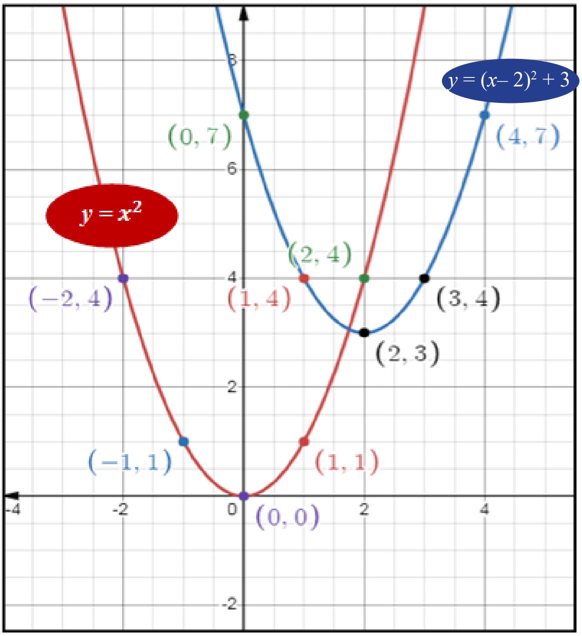
वर्ग फलन $y = x^2$ को तालिका

x	–2	–1	0	1	2
y	4	2	...	...	...

पहिले 2 एकाइ दायाँ र त्यसपछि 3 एकाइ माथि स्थानान्तरण गरी आउने वर्ग फलनको तालिका

x	0	1	2	3	4
y	7	4	3	4	7

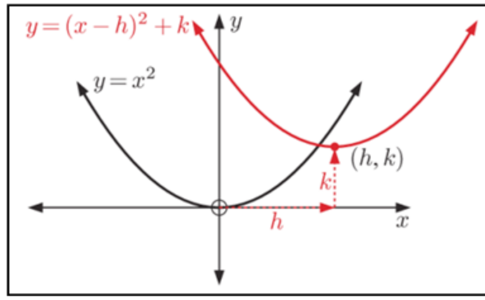
माथिका दुबै तालिकाबाट x र y का मानहरूलाई लेखाचित्रमा क्रमश: अङ्कित गर्दा तलको चित्रमा देखाइए जस्तै वक्र बन्छन् ।



दिइएको लेखाचित्रमा दुबै एउटै आकारका पाराबोला बनेका छन् । पाराबोला $y = x^2$ को शीर्षविन्दुको निर्देशाङ्क उद्गमविन्दु O(0, 0) र संयुक्त स्थानान्तरण पछिको पाराबोलाको शीर्षविन्दुको निर्देशाङ्क (2, 3) र सममितीय अक्ष $x = 2$ छ । वर्ग फलन $y = x^2$ को 2 एकाइ दायाँ क्षितिजीय स्थानान्तरण र 3 एकाइ माथि स्थानान्तरण गर्दा वर्ग फलन $y = (x - 2)^2 + 3$ बन्छ । यसलाई सँगैको लेखाचित्रमा देखाइएको छ ।

तसर्थ, वर्ग फलन $y = x^2$ लाई पहिले h

एकाइ दायाँ स्थानान्तरण र त्यसपछि k एकाइ माथि स्थानान्तरण गर्दा वर्ग फलन $y = (x - h)^2 + k$ बन्छ, यहि नै वर्ग फलन $y = x^2$ को संयुक्त स्थानान्तरण हो । स्थानान्तरणपछिको शीर्षविन्दुको निर्देशाङ्क (h, k) र सममितीय अक्ष $x = h$ हुन्छ । वर्ग फलन $y = (x - \text{h})^2 + k$ लाई शीर्षविन्दु रूपको पाराबोला भनिन्छ ।



वर्ग फलन $\text{y} = x^2$ लाई पहिले h एकाइ दायाँ स्थानान्तरण र त्यसपछि k एकाइ माथि स्थानान्तरण गर्दा वर्ग फलन $\text{y} = (x - \text{h})^2 + \text{k}$ बन्छ, यही नै वर्ग फलन $\text{y} = x^2$ को संयुक्त स्थानान्तरण हो । स्थानान्तरणपछिको शीर्षविन्दुको निर्देशाङ्क (h, k) र सममितीय अक्ष $x = \text{h}$ हुन्छ । वर्ग फलन $\text{y} = (x - \text{h})^2 + \text{k}$ लाई शीर्षविन्दु रूपको पाराबोला भनिन्छ ।

वर्ग फलनका लेखाचित्रहरूको विभिन्न अवस्था

क्र.स.	पाराबोलाको समीकरण	शीर्षविन्दु	पाराबोलाको मुख फर्किने दिशा
1.	$y = x^2$	(0, 0)	माथि
2.	$y = -x^2$	(0, 0)	तल
3.	$y = ax^2,\ a > 0$	(0, 0)	माथि
4.	$y = -\ ax^2,\ a > 0$	(0, 0)	तल
5.	$y = x^2 + k$	$(0, k)$	माथि
6.	$y = -x^2 + k$	$(0, k)$	तल
7.	$y = (x + \text{k})^2$	$(-k, 0)$	माथि
8.	$y = (x - \text{k})^2$	$(k, 0)$	माथि
9.	$y = a\ (x - \text{h})^2 + \text{k}$	(h, k)	माथि

अभ्यास 4.1

1. दिइएका प्रश्नहरूको उपयुक्त विकल्पमा ठिक चिह्न (✓) लगाउनुहोस् :

(क) वर्ग फलन $y = ax^2$ को लेखाचित्र घुमेको विन्दुको (turning point) निर्देशाङ्क कुन हो ?

a. (0, 0) b. (k, 0) c. (h, k) d. $(h, 0)$

(ख) वर्ग फलन $y = -ax^2$ र $\text{a} > 0$ को आकार कस्तो हुन्छ ?

a. $\cup$ b. $\cap$ c. $\subset$ d. $\supset$

(ग) वर्ग समीकरण $y = 2x^2$ ले दिने पाराबोला कुन रेखासँग सममितीय हुन्छ ?

a. X- अक्ष b. Y- अक्ष c. $y = 0$ d. $y = 1$

(घ) वर्ग फलन $y = a(x - h)^2 + k$ को शीर्षविन्दुको निर्देशाङ्क कुन हो ?

a. (0, 0) b. $(k, 0)$ c. (h, k) d. $(h, 0)$

(ङ) पाराबोला $y = x^2 - 2x + 1$ को शीर्षविन्दुको निर्देशाङ्क कति हुन्छ ?

a. (0, 0) b. (–1, 0) c. (1, 0) d) (1, 1)

2. तलका वर्ग समीकरणहरूलाई शीर्षविन्दुको रूप $y = (x - h)^2 + k$ मा परिवर्तन गरी लेखाचित्र स्केच गर्नुहोस् :

(क) $y = x^2$ (ख) $y = 2x^2$ (ग) $y = -3x^2$

(घ) $y = x^2 + 2$ (ङ) $y = x^2 - 5$ (च) $y = (x - 3)^2$

(छ) $y = (x + 3)^2$ (ज) $y = x^2 + 2x + 1$ (झ) $y = x^2 - 4x + 3$

(ञ) $y = -x^2 - 3x + 2$ (ट) $y = x^2 - x - 2$ (ठ) $y = -x^2 + 7x + 12$

3. दिइएका वर्ग समीकरणहरूको अध्ययन गरी निम्नलिखित प्रश्नहरूको उत्तर दिनुहोस् :

(क) $x^2 - 4x + 7 = 0$ (ख) $x^2 - 6x + 13 = 0$ (ग) $x^2 - 8x + 21 = 0$

(घ) $x^2 + 2x - 4 = 0$ (ङ) $x^2 + 2x + 1 = 0$

(अ) वर्ग समीकरणलाई शीर्षविन्दुका रूपमा परिवर्तन गर्नुहोस् ।

(आ) पाराबोलाको शीर्षविन्दु पत्ता लगाउनुहोस् ।

(इ) सममितीय अक्षको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ई) वर्ग फलन $y = x^2$ को स्थानान्तरणका रूपमा लेखाचित्र खिचेर देखाउनुहोस् ।

उत्तर

1. (क) a (ख) b (ग) b (घ) c (ङ) c

2. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् । 3. (क) $(x - 2)^2 + 3$, (2, 3) र सममितीय अक्ष $x = 2$

(ख) $(x - 3)^2 + 4$, (3, 4) र सममितीय अक्ष $x = 3$ (ग) $(x - 4)^2 + 5$, (4, 5) र सममितीय अक्ष $x = 4$

(घ) $(x + 1)^2 - 5$, (–1, –5) र सममितीय अक्ष $x = -1$ (ङ) $(x + 2)^2 - 3$, (–2, –3) र सममितीय अक्ष $x = -2$

लेखाचित्र शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

4.5 लेखाचित्रद्वारा वर्ग समीकरणको हल (Solution of Quadratic Equation using Graphs)

समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ एउटा साधारण वर्ग समीकरण हो । यहाँ, a, b र c वास्तविक सङ्ख्याहरू हुन् र $a \neq 0$ हुन्छ । वर्ग समीकरण हल गर्ने विधिहरूमा खण्डीकरण विधि, सूत्र प्रयोग गर्ने विधि, वर्ग पूरा गर्ने विधि आदि छन् । यहाँ, वर्ग समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ लाई लेखाचित्र विधिबाट हल गर्ने विधिका बारेमा अध्ययन गर्ने छौँ ।

उदाहरण 1

समीकरण $x^2 - 2x - 3 = 0$ लाई लेखाचित्रद्वारा हल गर्नुहोस् ।

समाधान

दिइएको वर्ग समीकरण $x^2 - 2x - 3 = 0$

अथवा, $x^2 = 2x + 3 = y$ मानौँ ।

$y = x^2$ ... (i)

$y = 2x + 3$ ... (ii)

अब, पाराबोला (i) र सिधा रेखा (ii) लाई लेखाचित्रमा देखाउन तलको तालिकामा देखाइए जस्तै x का विभिन्न मानहरू राखेर y का विभिन्न मानहरू निकालौँ :

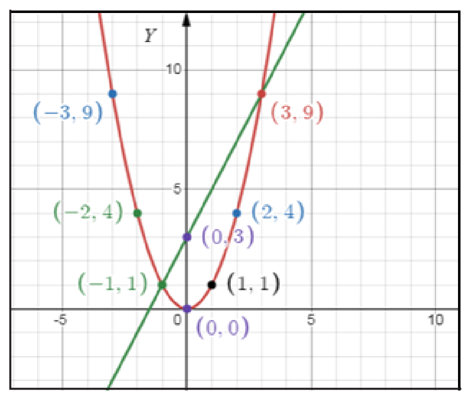
$y = x^2$ बाट

x	–3	–2	–1	0	1
y	9	4	1	0	1

$y = 2x + 3$ बाट

x	0	–1
y	3	1

माथिका दुबै समीकरणका x र y का विभिन्न मानहरूलाई लेखाचित्रमा अङ्कित गरी विन्दुहरू जोडौँ ।



पाराबोला $y = x^2$ र रेखा $y = 2x + 3$

माथिको लेखाचित्रमा पाराबोला $y = x^2$ लाई रेखा $y = 2x + 3$ ले विन्दुहरू (–1, 1) र (3, 9) मा काटेको छ । तसर्थ, वर्ग समीकरण $x^2 – 2x – 3 = 0$ को हल विन्दुहरू (–1, 0) र (3, 0) हुन् ।

अतः $x = –1$ वा 3 नै वर्ग समीकरण $x^2 - 2x - 3 = 0$ का हलहरू हुन् ।

अर्को तरिका

यहाँ, दिइएको समीकरण $x^2 - 2x - 3 = 0$ ... (i)

समीकरण (i) लाई वर्ग समीकरण $y = ax^2 + bx + c$ सँग तुलना गर्दा

$a = 1$, b = –2 र c = -3 छ ।

तसर्थ, पाराबोलाको शीर्षविन्दु $V(h, k) = V(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a})$

$= V(-\frac{-2}{2\times1}, \frac{4\times1\times-3-(-2)^2}{4\times1})$

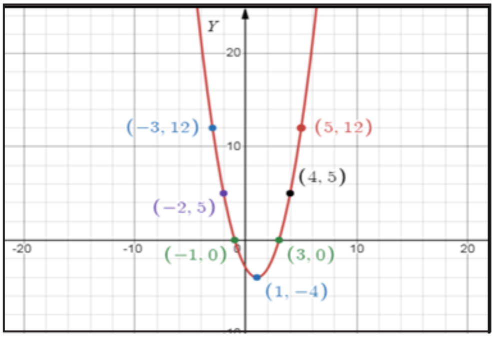
$= V(1, \frac{-12-4}{4})$ $= V(1, \frac{-16}{4})$

अत: $V(h, k) = V(1, -4)$

समीकरण $x^2 - 2x - 3 = 0$ लाई लेखाचित्रमा देखाउन तलको तालिकामा देखाइए जस्तै x का विभिन्न मानहरू राखेर y का विभिन्न मानहरू निकालौँ ।

x	–3	–2	–1	1	3	4	5
y	12	5	0	–4	0	5	12

माथिका x र y का विभिन्न मानहरूलाई लेखाचित्रमा अङ्कित गरी विन्दुहरू जोडौँ ।



दिइएको लेखाचित्रमा दिइएको वर्ग समीकरण $x^2 - 2x - 3 = 0$ लाई X- अक्षको विन्दुहरू (–1, 0) र (3, 0) मा काटेको छ । तसर्थ, वर्ग समीकरण $x^2 - 2x - 3 = 0$ को हल विन्दुहरू (–1, 0) र (3, 0) हुन् ।

अत: $x = -1$ वा 3 नै वर्ग समीकरण $x^2 - 2x - 3 = 0$ का हलहरू हुन् ।

4.6 लेखाचित्रद्वारा वर्ग समीकरण र रेखीय समीकरणको हल
(Solution of Quadratic Equation and Linear Equation using Graphs)

वर्ग समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ र रेखीय समीकरण $y = mx + c$ दिइएको अवस्थामा यी दुई समीकरण हल गरेर समाधान निकाल्छौँ । लेखाचित्रमा यी दुई समीकरण हल गर्न दुवै समीकरणका x र y का विभिन्न मानहरूलाई लेखाचित्रमा अङ्कित गरी विन्दुहरू जोडेर पाराबोला र रेखा खिच्छौँ । त्यसपछि लेखाचित्रमा पाराबोला र रेखा एकआपसमा जुन विन्दुहरूमा काटिन्छन् ती विन्दुहरू नै दुई समीकरणहरूको हल हुन्छ ।

उदाहरण 2

समीकरणहरू $x^2 - x - 3 = 0$ र $x + y = -2$ लाई लेखाचित्रद्वारा हल गर्नुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

दिइएका समीकरणहरू

$y = x^2 - x - 3$ ... (i)

$x + y = -2$ ... (ii)

समीकरण (i) लाई वर्ग समीकरण $y = ax^2 + bx + c$ सँग तुलना गर्दा

$a = 1$, $b = -1$ र $c = -3$ छ ।

तसर्थ, पाराबोलाको शीर्षविन्दु $V(h, k) = V(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a})$

$= V(-\frac{-1}{2\times1}, \frac{4\times1\times-3-(-1)^2}{4\times1})$

$= V(\frac{1}{2}, \frac{-12-1}{4}) = V(\frac{1}{2}, \frac{-13}{4})$

अत: $V(h, k) = V(\frac{1}{2}, \frac{-13}{4}) = V(0.5, -3.25)$

अब, पाराबोला (i) र सिधा रेखा (ii) लाई लेखाचित्रमा देखाउन तलका तालिकामा देखाए जस्तै x का विभिन्न मानहरू राखेर y का विभिन्न मानहरू निकालौं :

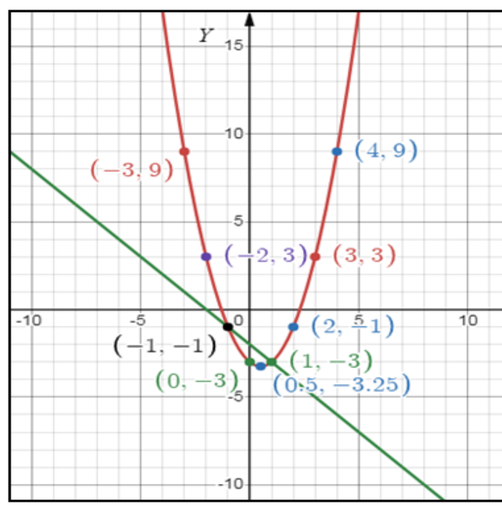
$y = x^2 - x - 3$ बाट

x	-3	-2	–1	0.5	1	2	3	4
y	9	3	–1	–3.25	–3	–1	3	9

$y = -2 - x$ बाट

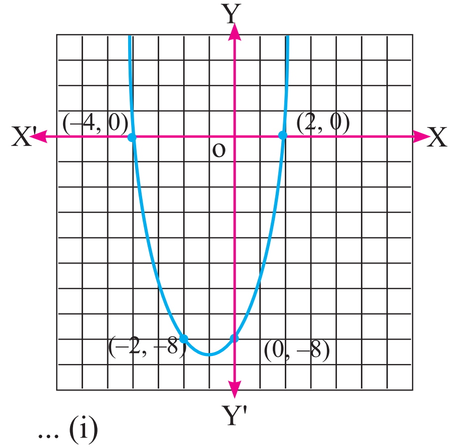
x	–1	1
y	–1	–3

माथिका दुबै समीकरणका x र y का विभिन्न मानहरूलाई लेखाचित्रमा अङ्कित गरी विन्दुहरू जोडौं ।



माथिको लेखाचित्रमा दिइएको समीकरण $y = x^2 - x - 3$ लाई रेखा $x + y = -2$ ले विन्दुहरू $(-1, -1)$ र $(1, -3)$ मा काटेको छ । तसर्थ, वर्ग समीकरण $y = x^2 - x - 3$ र रेखा $x + y = -2$ को हल विन्दुहरू $(-1, -1)$ र $(1, -3)$ हुन् ।

उदाहरण 3



दिइएको पाराबोलाको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान

मानौँ, पाराबोलाको समीकरण

$y = ax^2 + bx + c$ छ ।

यहाँ, लेखाचित्रबाट पाराबोलाका दिइएको

विन्दुहरू A(-4, 0), B(2, 0), C(0, -8)

र D(2, 0) छन् ।

विन्दु A(–4, 0) मा, $0 = 16a - 4b + c$ ... (i)

विन्दु B(2, 0) मा, $0 = 4a + 2b + c$ ... (ii)

विन्दु C(0, 8) मा, $-8 = c$ ... (iii)

अब, समीकरण (i) र (iii) बाट

$16a - 4b - 8 = 0$

अथवा, $4(4a - b - 2) = 0$

अथवा, $4a - b = 2$ ... (iv)

समीकरण (ii) र (iii) बाट

$4a + 2b - 8 = 0$

अथवा, $2(2a + b - 4) = 0$

अथवा, $2a + b = 4$

अथवा, $b = 4 - 2a$ ... (v)

अब, समीकरण (iv) र (v) बाट

$4a - (4 - 2a) = 2$

अथवा, $4a - 4 + 2a = 2$

अथवा, $6a = 6$

अथवा, $a = 1$

अब, a र c को मान समीकरण (V) मा राख्दा

$b = 4 - 2 \times 1 = 4 - 2 = 2$

अतः $a = 1, b = 2$ र $c = -8$

अब, को a, b र c मान समीकरण : $y = ax^2 + bx + c$ राख्दा

$y = x^2 + 2x - 8$

अतः आवश्यक समीकरण : $y = x^2 + 2x - 8$

अभ्यास 4.2

1. लेखाचित्र विधिद्वारा दिइएका समीकरणहरूको हल गर्नुहोस् :

(क) $x^2 + 2x - 3 = 0$ (ख) $x^2 - 5x + 6 = 0$ (ग) $x^2 - 4x + 3 = 0$

(घ) $2x^2 - 7x + 3 = 0$ (ङ) $x^2 - 3x - 10 = 0$

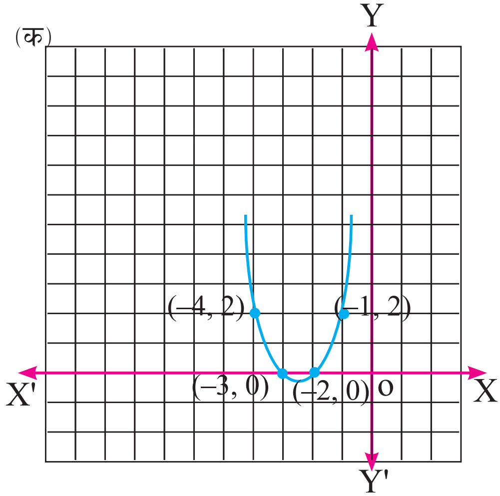
2. **दिइएका जोडी समीकरणहरूलाई लेखाचित्रद्वारा हल गर्नुहोस् :**

(क) $y = x^2$ र $y = x + 2$ (ख) $y = x^2 - x - 3$ र $x - y = 0$

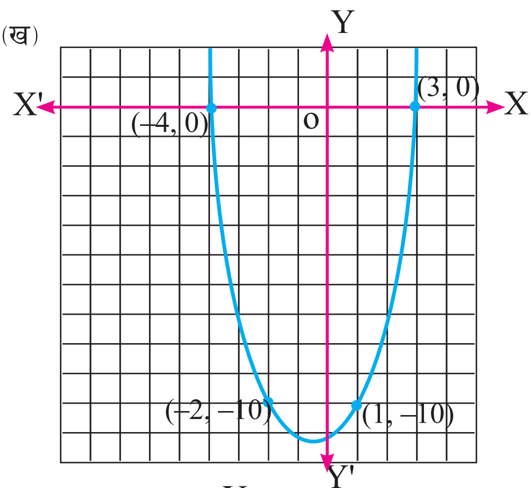
(ग) $y = 6x^2 - 2x - 15$ र $y = 4x - 3$ (घ) $y = x^2 - 2x$ र $y = x + 4$

3. **दिइएका पाराबोलाहरूको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् :**

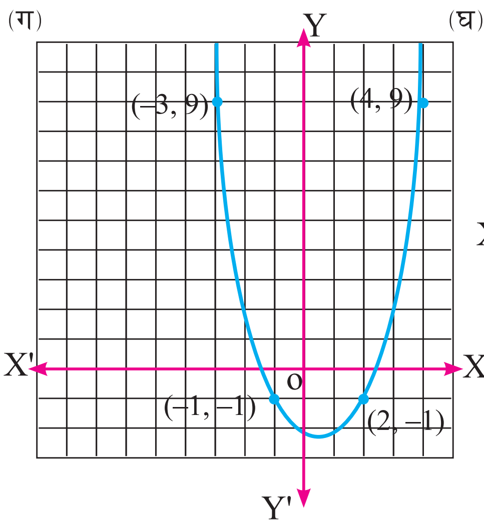
(क)



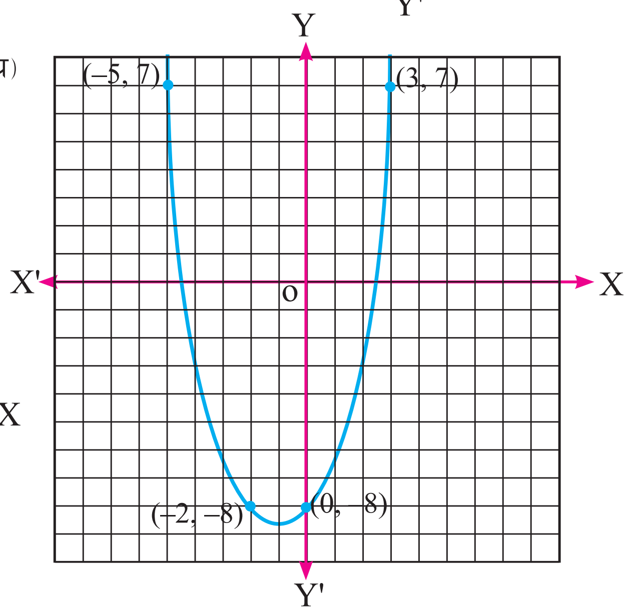
(ख)



(ग)



(घ)



उत्तर

1. (क) (1, –3) (ख) (2, 3) (ग) (1, 3) (घ) $(\frac{1}{2}, 3)$ (ङ) (–1, 5)

2. (क)- (घ) शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

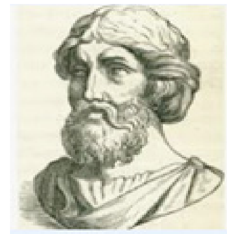
3. (क) $y = x^2 + 5x + 6$ (ख) $y = x^2 + x - 12$ (ग) $y = x^2 - x - 3$ (घ) $y = x^2 + 2x - 8$

पाठ 5

सर्ड (Surd)

5.1 परिचय (Introduction)

साधारणमूलक चिह्नभित्र रहेका सङ्ख्याहरूको मूल आनुपातिक सङ्ख्यामा पत्ता लगाउन सकिँदैन भने त्यस्ता सङ्ख्याहरूलाई सर्ड भनिन्छ । सर्ड अवधारणका संस्थापकका रूपमा ग्रिक गणितज्ञ Hippasus (500 BC) लाई मानिन्छ भने सर्ड शब्दको औपचारिक प्रयोग Robert Recorde ले सन् 1551 मा पहिलो पटक गरेका थिए । मूल चिह्नभित्र भएका सङ्ख्याहरू : $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{45}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{5}$, आदि सबैका मान अनानुपातिक सङ्ख्या आउँछ। तसर्थ यी सबै सङ्ख्या सर्डहरू हुन् । सर्ड दुई किसिमका हुन्छन् : शुद्ध सर्ड र मिश्रित सर्ड । शुद्ध सर्डहरू $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{5}$ हुन् भने र मिश्रित सर्डहरू $\sqrt{12} = \sqrt{2 \times 2 \times 3} = 2\sqrt{3}$, $\sqrt{45} = \sqrt{3 \times 3 \times 5} = 3\sqrt{5}$ हुन् । सर्डहरूबिच जोड, घटाउ, गुणन र भाग गर्न सकिन्छ । सर्डको प्रयोग इन्जिनियरिङ, भौतिकशास्त्र, कम्प्युटर विज्ञान, वाणिज्य, ज्यामिति, त्रिकोणमितिलगायत दशमलवमा देखाउन नसकिने मानहरू पत्ता लगाउन तथा राउन्डिङ त्रुटि कम गर्न सर्डको प्रयोग गरिन्छ ।



Hippasus

5.2 सर्डयुक्त समीकरण (Equations Involving Surds)

क्रियाकलाप 1

दिइएका प्रश्नहरू अध्ययन गरी छलफल गरेर निष्कर्ष निकाल्नुहोस् :

(क) सर्डयुक्त समीकरणहरू $\sqrt{x} - 2 = 3$, $\sqrt{2x-1} = 3$ र $\sqrt{3x+10} - x = 0$ मा चलराशि x को मान कति कति होला ?

(ख) माथिका सर्डयुक्त समीकरणहरूलाई कसरी हल गर्न सकिन्छ ?

(ग) सर्डयुक्त समीकरणहरूको हल गर्ने निश्चित नियम छ कि छैन ?

सामान्यतः सर्डयुक्त समीकरणहरू हल गर्न मूल चिह्नभित्र रहेका पदहरू र मूल चिह्नभित्र नरहेका पदहरूलाई अलग अलग गरिनुपर्छ । तत्पश्चात् समीकरणमा भएका वर्गमूल वा घनमूललाई वर्ग वा घन गरी मूल चिह्न हटाएर सर्डयुक्त समीकरणहरूको हल गर्न सकिन्छ । यसर्थ, सर्डयुक्त समीकरणहरू हल गर्न तलका चरणहरू अपनाउनुपर्छ :

चरण 1 : मूल चिह्नभित्र रहेका पदहरू र मूल चिह्नभित्र नरहेका पदहरूलाई अलग अलग गरिनुपर्छ, जस्तै : $\sqrt{x} - 2 = 3$ लाई $\sqrt{x} = 5$ बनाउनुपर्छ ।

चरण 2 : वर्गमूल वा घनमूललाई हटाउन समीकरणलाई वर्ग वा घन गरी मूल चिह्नविहीन बनाउनुपर्छ, जस्तै : $\sqrt{2x-1} = 3$ भए $(\sqrt{2x-1})^2 = 3^2$ बनाउनुपर्छ ।

चरण 3 : प्राप्त समीकरणलाई सरलीकरण गरेर नयाँ समीकरण समाधान गरिनुपर्छ, जस्तै : $2x - 1 = 9$, अथवा $2x = 9 + 1$, अथवा : $2x = 10$, अथवा $x = 5$ हुन्छ ।

चरण 4 : सर्डयुक्त समीकरणहरूलाई वर्ग वा घन गर्दा गलत समाधान आउन सक्छ, त्यसैले प्राप्त समाधानहरू सुरुको समीकरणमा राखेर जाँच गर्नुपर्छ, जस्तै : $\sqrt{3x+10} - x = 0$ लाई हल गर्दा x का मानहरू 5 र -2 आउँछन् । सुरुको समीकरणमा x को मान -2 राख्दा समीकरण अमान्य हुन्छ तर x को मान 5 राख्दा समीकरण मान्य हुन्छ ।

चरण 5 : मूल चिह्नभित्रका पदहरू दुईओटा भएमा समीकरणलाई दुई पटक वर्ग वा घन गरी मूल चिह्नविहीन बनाउनुपर्छ ।

उदाहरण 1

हल गर्नुहोस् र जाँचेर हेर्नुहोस् :

(क) $\sqrt{2x} = 6$ (ख) $\sqrt[3]{2x-1} = 3$ (ग) $\sqrt{3x+10} - x = 0$ (घ) $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = 1$

समाधान

(क) यहाँ, $\sqrt{2x} = 6$

दुबैतिर वर्ग गर्दा

$(\sqrt{2x})^2 = 6^2$

अथवा, $2x = 36$

अथवा, $x = \frac{36}{2}$

अत: $x = 18$

जाँचेर हेर्दा

यहाँ, $\sqrt{2x} = 6$

अब, $x = 18$ राख्दा

अथवा, $\sqrt{2 \times 18} = 6$

अथवा, $\sqrt{36} = 6$

अथवा, $6 = 6$, जुन सत्य छ ।

अत: $x = 18$ हुन्छ ।

(ख) यहाँ, $\sqrt[3]{2x-1} = 3$

दुबैतिर घन गर्दा

$(\sqrt[3]{2x-1})^3 = 3^3$

अथवा, $2x - 1 = 27$

अथवा, $2x = 27 + 1$

अथवा, $2x = 28$

अथवा, $x = \frac{28}{2}$

अत: $x = 14$

जाँचेर हेर्दा :

यहाँ, $\sqrt[3]{2x-1} = 3$

अब, $x = 14$ राख्दा

अथवा, $\sqrt[3]{2 \times 14 - 1} = 3$

अथवा, $\sqrt[3]{28-1} = 3$

अथवा, $\sqrt[3]{27} = 3$

अथवा, $3 = 3$, जुन सत्य छ ।

अत: $x = 14$ हुन्छ ।

(ग) यहाँ, $\sqrt{3x+10} - x = 0$

अथवा, $\sqrt{3x+10} = x$

दुबैतिर वर्ग गर्दा

अथवा, $(\sqrt{3x+10})^2 = (x)^2$

अथवा, $3x + 10 = x^2$

अथवा, $x^2 - 3x - 10 = 0$

अथवा, $x^2 - x(5-2) - 10 = 0$

अथवा, $x^2 - 5x + 2x - 10 = 0$

अथवा, $x(x-5) + 2(x-5) = 0$

अथवा, $(x+2)(x-5) = 0$

अथवा, $x + 2 = 0$, अतः $x = -2$

अथवा, $x - 5 = 0$, अतः $x = 5$

अतः $x = 5$ हुन्छ ।

जाँचेर हेर्दा

यहाँ, $\sqrt{3x+10} - x = 0$

अब, $x = -2$ राख्दा

$\sqrt{3(-2)+10} - (-2) = 0$

अथवा, $\sqrt{-6+10} + 2 = 0$

अथवा, $\sqrt{4} + 2 = 0$

अथवा, $2 + 2 = 0$

अथवा, $4 \neq 0$, जुन असत्य छ । अतः $x \neq -2$

फेरि, अब, $x = 5$ राख्दा

$\sqrt{3(5)+10} - (5) = 0$

अथवा, $\sqrt{25} - 5 = 0$

अथवा, $5 - 5 = 0$

अथवा, $0 = 0$, जुन सत्य छ । अतः $x = 5$ हुन्छ ।

(घ) यहाँ, $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = 1$

अथवा, $\sqrt{x+1} = 1 + \sqrt{x}$

दुबैतिर वर्ग गर्दा

अथवा, $(\sqrt{x+1})^2 = (1 + \sqrt{x})^2$

अथवा, $x + 1 = 1 + 2\sqrt{x} + x$

अथवा, $0 = 2\sqrt{x}$

अथवा, $\sqrt{x} = 0$

अतः $x = 0$

जाँचेर हेर्दा

यहाँ, $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = 1$

अब, $x = 0$ राख्दा

$\sqrt{0+1} - \sqrt{0} = 1$

अथवा, $\sqrt{1} = 1$

अथवा, $1 = 1$, जुन सत्य छ । अतः $x = 0$ हुन्छ ।

उदाहरण 2

हल गर्नुहोस् र जाँचेर हेर्नुहोस् :

$$\frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = 3 + \frac{\sqrt{x}+1}{2}$$

समाधान : यहाँ,

$$\frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = 3 + \frac{\sqrt{x}+1}{2}$$

अथवा, $\frac{(\sqrt{x})^2-(1)^2}{\sqrt{x}-1} = \frac{6+\sqrt{x}+1}{2}$

अथवा, $\frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{x}+7}{2}$

अथवा, $\sqrt{x} + 1 = \frac{\sqrt{x}+7}{2}$

अथवा, $2\sqrt{x} + 2 = \sqrt{x} + 7$

अथवा, $2\sqrt{x} - \sqrt{x} = 7 - 2$

अथवा, $\sqrt{x} = 5$

दुबैतिर वर्ग गर्दा, $(\sqrt{x})^2 = 5^2$

अत: $x = 25$

जाँचेर हेर्दा

यहाँ, $\frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = 3 + \frac{\sqrt{x}+1}{2}$

अब, $x = 25$ राख्दा

अथवा, $\frac{25-1}{\sqrt{25}-1} = 3 + \frac{\sqrt{25}+1}{2}$

अथवा, $\frac{24}{5-1} = 3 + \frac{5+1}{2}$

अथवा, $\frac{24}{4} = 3 + 3$

अथवा, $6 = 6$, जुन सत्य छ ।

अत: $x = 25$ हुन्छ ।

उदाहरण 3

हल गर्नुहोस् र जाँचेर हेर्नुहोस् : $\sqrt{x^2-3x+5} - \sqrt{x^2-4x+4} = 1$

समाधान

यहाँ, $\sqrt{x^2-3x+5} - \sqrt{x^2-4x+4} = 1$

अथवा, $\sqrt{x^2-3x+5} = 1 + \sqrt{x^2-4x+4}$

अथवा, $\sqrt{x^2-3x+5} = 1 + \sqrt{(x-2)^2}$

अथवा, $\sqrt{x^2-3x+5} = 1 + x - 2$

अथवा, $\sqrt{x^2-3x+5} = x - 1$

दुबैतिर वर्ग गर्दा

अथवा, $(\sqrt{x^2-3x+5})^2 = (x-1)^2$

अथवा, $x^2 - 3x + 5 = x^2 - 2x + 1$

अथवा, $x^2 - x^2 - 3x + 2x = 1 - 5$

अथवा, $x^2 - x^2 - 3x + 2x = -4$

अथवा, $-x = -4$

अत: $x = 4$

जाँचेर हेर्दा

यहाँ, $\sqrt{x^2-3x+5} - \sqrt{x^2-4x+4} = 1$

अब, $x = 4$ राख्दा

अथवा, $\sqrt{4^2-3.4+5} - \sqrt{4^2-4.4+4} = 1$

अथवा, $\sqrt{16-12+5} - \sqrt{16-16+4} = 1$

अथवा, $\sqrt{9} - \sqrt{4} = 1$

अथवा, $3 - 2 = 1$

अथवा, $1 = 1$, जुन सत्य छ ।

अत: $x = 4$ हुन्छ ।

अभ्यास 5.1

1. **दिइएका समीकरणहरूको हल गर्नुहोस् र जाँचेर हेर्नुहोस् :**

(क) $\sqrt{2x} = 6$ (ख) $\sqrt{3x - 5} = 1$ (ग) $6 - \sqrt{3x + 4} = 1$

(घ) $\sqrt[3]{5x - 3} = 3$ (ङ) $\sqrt{3x + 6} - 3\sqrt{x - 4} = 0$

(च) $\sqrt{11x^2 + 45} = 4x$

2. **दिइएका समीकरणहरूको हल गर्नुहोस् र जाँचेर हेर्नुहोस् :**

(क) $\sqrt{x + 7} + \sqrt{x} = 7$ (ख) $\sqrt{x + 5} = 5 - \sqrt{x}$ (ग) $\sqrt{3x - 2} - \sqrt{x - 2} = 2$

(घ) $\sqrt{3x + 10} - x = 0$ (ङ) $\sqrt{3x - 5} = x - 1$ (च) $\sqrt{2x^2 - 7} = x + 3$

3. **दिइएका समीकरणहरूको हल गर्नुहोस् र जाँचेर हेर्नुहोस् :**

(क) $\sqrt{x - 1} + \sqrt{x} = \frac{2}{\sqrt{x}}$ (ख) $\frac{x - 1}{\sqrt{x} + 1} = 3 + \frac{\sqrt{x} + 1}{2}$

(ग) $\sqrt{x^2 - 3x + 5} - \sqrt{x^2 - 4x + 4} = 1$ (घ) $\frac{\sqrt{x + 4} + \sqrt{x - 4}}{\sqrt{x + 4} - \sqrt{x - 4}} = 2$

(ङ) $\frac{1}{\sqrt{x + 2}} - \frac{1}{\sqrt{4x + 8}} = 2$ (च) $\sqrt{x^2 - 3x + 3} + \sqrt{x^2 - x + 1} = 2$

(छ) $\sqrt{x^2 - 2x - 4} - \sqrt{x^2 - 3x - 3} = 1$

4. सर्तयुक्त समीकरण $\frac{x - 1}{\sqrt{x} + 1} = 4 + \frac{\sqrt{x} - 1}{2}$ लाई हल गर्दा x को मान 81 आउँछ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् । उक्त समीकरण कुन अवस्थामा अपरिभाषित हुन्छ, कारण लेख्नुहोस् ।

5. अभ्यासमा दिइएजस्तै अन्य कुनै पाँचओटा प्रश्नहरू निर्माण गरी तिनीहरूको समाधानसहित कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

उत्तर

1. (क) 18 (ख) 2 (ग) 7 (घ) 6 (ङ) 7 (च) 3, but not –3
2. (क) 9 (ख) 4 (ग) 2, 6 (घ) 5, but not -2 (ङ) 2, 3 च) -2, 8
3. (क) $\frac{4}{3}$ (ख) 25 (ग) 4 (घ) 3 (ङ) $\frac{-31}{16}$ (च) 1

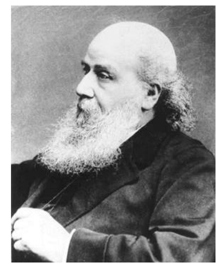
(छ) 4, but not $\frac{-4}{3}$

4. समीकरणमा $\sqrt{x} + 1$ को मान 0 भएमा $\frac{x - 1}{\sqrt{x} + 1}$ अपरिभाषित हुन्छ ।

पाठ 6 मेट्रिक्स र डिटरमिनान्ट (Matrix and Determinant)

6.1 परिचय (Introduction)

पङ्क्ति र लहरका रूपमा रहेका सङ्ख्याहरूको आयातकार प्रस्तुतिलाई मेट्रिक्स भनिन्छ । मेट्रिक्स शब्दको परिचय James Joseph Sylvester बाट भएको र यसलाई जनाउन अङ्ग्रेजी वर्णमालाका ठुला अक्षरहरू, जस्तै : A, B, ...को प्रयोग गर्ने कामको सुरुआत भने Arthur Cayley ले सन् 1858 मा विकास गरेको पाइन्छ । त्यसै गरी डिटरमिनान्टको विकास गर्ने सिलसिलामा Gottfried Wilhelm Leibniz का अप्रकाशित कृतिहरूमा भएका विधिहरूलाई पछि Cramer ले निश्चित नियमका रूपमा विकास गरेको पाइन्छ ।



James Joseph Sylvester

कम्प्युटर विज्ञान, इन्जिनियरिङ, अर्थशास्त्र, तथ्याङ्कशास्त्र आदि क्षेत्रमा यसको प्रयोग विशेष रूपमा भएको पाइन्छ । यसले डाटा प्रोसेसिङ र गणनालाई छिटो एवम् प्रभावकारी बनाउँछ । क्षेत्रफल र आयतन गणना गर्न डिटरमिनान्टको प्रयोग भएका पाइन्छ ।

6.2 मेट्रिक्सको क्रम परिवर्तन (Transpose of Matrix)

क्रियाकलाप 1

दिइएको मेट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 7 \\ 2 & 4 & -6 \end{bmatrix}$ मा छलफल गरी सोधिएका प्रश्नहरूको उत्तर दिनुहोस् :

(क) मेट्रिक्स A मा कतिओटा पङ्क्तिहरू छन् ?

(ख) मेट्रिक्स A मा कतिओटा लहरहरू छन् ?

(ग) मेट्रिक्स A को क्रम कति हुन्छ ?

(घ) मेट्रिक्स A को पङ्क्तिलाई लहरमा र लहरलाई पङ्क्तिमा लेख्दा कस्तो मेट्रिक्स बन्छ, लेख्नुहोस् ।

(ङ) माथि (घ) मा बनेको नयाँ मेट्रिक्सको क्रम लेख्नुहोस् ।

मेट्रिक्स A मा दुईओटा पङ्क्तिहरू र तीनओटा लहरहरू छन् । त्यसैले मेट्रिक्स A को क्रम 2×3 हुन्छ । मेट्रिक्स A को पङ्क्तिमा भएका सङ्ख्याहरू लहरमा र लहरमा भएका सङ्ख्याहरू पङ्क्तिमा लेख्दा बन्ने नयाँ मेट्रिक्स $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 4 \\ 7 & -6 \end{bmatrix}$ बन्छ जहाँ, क्रम 3×2 हुन्छ । दिइएको मेट्रिक्स A को क्रम परिवर्तन मेट्रिक्सलाई A', A^t अथवा A^T ले जनाइन्छ । त्यसैले $A' = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 4 \\ 7 & -6 \end{bmatrix}$ लेखिन्छ ।

कुनै मेट्रिक्सका पङ्क्तिलाई लहर र लहरलाई पङ्क्तिमा परिवर्तन गर्दा प्राप्त हुने नयाँ मेट्रिक्सलाई दिइएको मेट्रिक्सको क्रम परिवर्तन भनिन्छ । यदि दिइएका मेट्रिक्सहरू A, B, C, ... भए क्रम परिवर्तन मेट्रिक्सलाई क्रमश: A', B', C', ... ले जनाइन्छ ।

6.1.1 मेट्रिक्सको क्रम परिवर्तनका गुणहरू (Properties of Transpose of Matrix)

समान क्रमका दुईओटा मेट्रिक्सहरू A र B छन् र k कुनै वास्तविक सङ्ख्या भए मेट्रिक्सको क्रम परिवर्तनका मुख्य गुणहरू यस प्रकार छन् ।

(क) दुई मेट्रिक्सको योगफलको क्रम परिवर्तन

जस्तै : $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ र $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ भए,

$$(A+B) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+1 & 0+2 \\ 1+0 & 3+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$(A+B)^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

त्यसै गरी, $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ भए $A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

र $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ भए, $B^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ हुन्छ ।

अब, $A^T + B^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+1 & 1+0 \\ 0+2 & 3+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$

अत: $(A+B)^T = A^T + B^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$

(ख) दुई मेट्रिक्सको अन्तरको क्रम परिवर्तन

मानौँ, $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$ र $B = \begin{bmatrix} -7 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$ भए,

$$A - B = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -7 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5+7 & 3-2 \\ 6-4 & -2-8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12 & 1 \\ 2 & -10 \end{bmatrix}$$

$$(A-B)^T = \begin{bmatrix} 12 & 2 \\ 1 & -10 \end{bmatrix}$$

फेरि, $A^T = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ र $B^T = \begin{bmatrix} -7 & 4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$

$A^T - B^T = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -7 & 4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5+7 & 6-4 \\ 3-2 & -2-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 2 \\ 1 & -10 \end{bmatrix}$

अतः $(A - B)^T = A^T - B^T = \begin{pmatrix} 12 & 2 \\ 1 & -10 \end{pmatrix}$

(ग) स्केलर गुणनको क्रम परिवर्तन

मानौँ, मेट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 8 & -3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ र $k = 2$ स्केलर सङ्ख्या हो । जहाँ,

$kA = 2\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 8 & -3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 16 & -6 \\ 10 & 2 \end{bmatrix}$

फेरि, $(kA)^T = \begin{bmatrix} 4 & 16 & 10 \\ 6 & -6 & 2 \end{bmatrix}$

फेरि, $A^T = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 5 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ र $kA^T = 2\begin{bmatrix} 2 & 8 & 5 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 16 & 10 \\ 6 & -6 & 2 \end{bmatrix}$

अतः $(kA)^T = kA^T$

(घ) क्रम परिवर्तन मेट्रिक्सको क्रम परिवर्तन

A मेट्रिक्सको क्रम परिवर्तन मेट्रिक्स A^T हो । फेरि, A^T को क्रम परिवर्तन गर्दा सुरुको मेट्रिक्स A नै प्राप्त हुन्छ, जस्तै : एउटा 2×2 मेट्रिक्स, $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 7 & -3 \end{bmatrix}$ भए, $A^T = \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ हुन्छ ।

फेरि, $(A^T)^T = \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 7 & -3 \end{bmatrix} = A$

अतः $(A^T)^T = A$

(ङ) शून्य मेट्रिक्सको क्रम परिवर्तन

O एउटा शून्य मेट्रिक्स हो, जस्तै : एउटा 2×2 क्रम भएको शून्य मेट्रिक्स $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ लिऔँ । यसको क्रम परिवर्तन गराउँदा $O^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ बन्छ । त्यसैले $O^T = O$ हुन्छ । त्यसै गरी फरक क्रम भएका शून्य मेट्रिक्सहरू, $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ र $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ मा छलफल गर्नुहोस् र O^T पत्ता लगाउनुहोस् ।

(च) एकाइ वा एकात्मक मेट्रिक्सको क्रम परिवर्तन

I एउटा एकाइ वा एकात्मक मेट्रिक्स हो । एउटा 2×2 क्रम भएको एकाइ मेट्रिक्स $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

लिऔं । यसको क्रम परिवर्तन गराउँदा $I^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ बन्छ । त्यसैले $(I)^T = I$ हुन्छ । त्यसै गरी 3×3 क्रम भएको एकाइ मेट्रिक्स $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ मा I^T पत्ता लगाउनुहोस् र छलफल गर्नुहोस् ।

(छ) सममितिक मेट्रिक्सको क्रम परिवर्तन

एउटा सममितिक मेट्रिक्स A छ । यसको क्रम परिवर्तन गराउँदा A^T मेट्रिक्स बन्छ । यसमा मेट्रिक्स A र मेट्रिक्स A^T मा कुनै परिवर्तन हुँदैन, जस्तै : $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ भए, $A^T = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ हुन्छ ।

त्यसै गरी $B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 8 & 1 \end{bmatrix}$ भए, $B^T = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 8 & 1 \end{bmatrix}$ हुन्छ ।

उदाहरण 1

यदि $M = \begin{bmatrix} -2 & 8 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ भए M^T पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, दिइएको मेट्रिक्स $M = \begin{bmatrix} -2 & 8 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$

अत: $M' = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$ हुन्छ ।

उदाहरण 2

यदि $B = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ भए $(B^T)^T = B$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ, दिइएको मेट्रिक्स, $B = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

$B^T = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$

फेरि, $(B^T)^T = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = B$

अत: $(B^T)^T = B$ प्रमाणित भयो ।

उदाहरण 3

यदि $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ र $B = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ भए,

(क) $(A + B)^T = A^T + B^T$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

(ख) के $(A + B)$ लाई सममितिक मेट्रिक्स भन्न सकिन्छ, कारण दिनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, दिइएका मेट्रिक्सहरू $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ र $B = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ छन् ।

(क) $A + B = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-2 & 6-1 \\ 2+3 & 1+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$

फेरि, $(A + B)^T = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$.........(i)

त्यसै गरी $A^T = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$ र $B^T = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$

$A^T + B^T = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-2 & 2+3 \\ 6-1 & 1+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$

$\therefore A^T + B^T = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$ ....(ii)

समीकरण (i) र (i) बाट $(A + B)^T = A^T + B^T$ प्रमाणित भयो ।

(ख) $(A + B)$ लाई सममितिक मेट्रिक्स भनिन्छ किनकि $(A + B) = (A + B)^T$ छ ।

उदाहरण 4

यदि $A = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} p & 11 \\ 5 & q \end{bmatrix}$ र $(A + B)^T = C$ भए p र q का मानहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, $A = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} p & 2 \\ 3 & q \end{bmatrix}$ र $(A + B)^T = C$ छन् ।

$(A + B) = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6+8 & 7-2 \\ 8+3 & 2+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 5 \\ 11 & 7 \end{bmatrix}$

फेरि, $(A + B)^T = \begin{bmatrix} 14 & 5 \\ 11 & 7 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 14 & 11 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$

प्रश्नअनुसार, $(A + B)^T = C$

अथवा, $\begin{bmatrix} 14 & 11 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 2 \\ 3 & q \end{bmatrix}$

बराबर मेट्रिक्सका सङ्गति सदस्यहरूको मान बराबर गर्दा, $p = 14$ र $q = 7$

अत: $p = 14$ र $q = 7$

अभ्यास 6.1

1. **दिइएका प्रश्नहरूको उपयुक्त विकल्पमा ठिक चिह्न (✓) लगाउनुहोस् :**

(क) मेट्रिक्सको क्रम परिवर्तन भनेको के हो ?

a. पङ्क्तिको मात्र परिवर्तन b. लहरको मात्र परिवर्तन

c. चिह्नको मात्र परिवर्तन d. पङ्क्ति र लहरको परिवर्तन

(ख) यदि $C = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -2 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$ छ भने मेट्रिक्स C^T तलका मध्ये कुन हुन्छ ?

a. $\begin{bmatrix} 5 & -1 & -2 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 6 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & -1 \\ 8 & -2 \end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 1 & -6 \\ 2 & -8 \end{bmatrix}$

(ग) सममितिक मेट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ भए A^T तलका मध्ये कुन हुन्छ ?

a. $\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} -5 & -3 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$

(घ) यदि $P = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ र $Q = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -6 & 1 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$ भए $(P + Q)^T$ तलका मध्ये कुन हो ?

a. $\begin{bmatrix} 3 & -4 & 12 \\ -2 & 2 & 9 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 2 \\ 12 & 9 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} -3 & 4 & -12 \\ 2 & -2 & -9 \end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 1 & -6 \\ 2 & -8 \end{bmatrix}$

2. **दिइएका मेट्रिक्सहरूको क्रम परिवर्तन मेट्रिक्स पत्ता लगाउनुहोस् :**

(क) $R = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ (ख) $W = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ (ग) $X = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$

(घ) $Y = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 2 & -1 & 10 \end{bmatrix}$ (ङ) $Z = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & -4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ (च) $M = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

3. यदि $P = \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$ भए, $(P^T)^T = P$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

4. यदि $M = \begin{bmatrix} p & q & r \\ a & b & c \\ x & y & z \end{bmatrix}$ भए,

(क) M^T र $(M^T)^T$ पत्ता लगाउनुहोस् ।   (ख) M र $(M^T)^T$ को सम्बन्ध लेख्नुहोस् ।

5. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ र $B = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ छ भने,

(क) $(A^T + B^T)$ पत्ता लगाउनुहोस् ।   (ख) $(A + B)^T$ पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) के $(A + B)^T$ र $(A^T + B^T)$ बराबर लेख्न सकिन्छ, कारण दिनुहोस् ।

6. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ र $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$ भए,

(क) $(A + B)^T = A^T + B^T$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

(ख) के (A + B) लाई सममितिक मेट्रिक्स भन्न सकिन्छ, कारण दिनुहोस् ।

7. यदि $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$ र $A^T = B$ छ भने, a, b, c र d को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

उत्तर

1. (क) (d)   (ख) (b)   (ग) (a)   (घ) (a)

2. (क) $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ (ख) $\begin{bmatrix} -3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ (ग) $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ (घ) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \\ 7 & 10 \end{bmatrix}$ (ङ) $\begin{bmatrix} 0 & 5 & 4 \\ 1 & -4 & 5 \end{bmatrix}$ (च) $M = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -1 \\ 7 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

3. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् । 4. (क) $M' = \begin{bmatrix} p & a & x \\ q & b & y \\ r & c & z \end{bmatrix}$ र $(M')' = \begin{bmatrix} p & q & r \\ a & b & c \\ x & y & z \end{bmatrix}$ (ख) बराबर

5. (क) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$ (ख) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$ (ग) हो

6. (क) शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।   (ख) सकिँदैन   7. $a = 4, c = -3, b = -2, d = -5$

6.2 मेट्रिक्सको गुणन (Multiplication of Matrix)

क्रियाकलाप 1

मेट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ र $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$ बाट सोधिएका प्रश्नका आधारमा छलफल गरी उत्तर दिनुहोस् :

(क) मेट्रिक्स A र B को क्रम कति कति छ ?

(ख) मेट्रिक्स A र मेट्रिक्स B को गुणन गर्दा बन्ने मेट्रिक्स कसरी पत्ता लगाउन सकिन्छ ?

(ग) के AB र BA बराबर हुन्छन् ?

दिइएको मेट्रिक्स A को क्रम 2×2 छ र मेट्रिक्स B को क्रम पनि 2×2 छ ।

अब, AB पत्ता लगाउन, मेट्रिक्स A को पङ्क्तिले मेट्रिक्स B को लहरलाई निम्नानुसार गुणन गर्नुहोस् :

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} = \ldots\ldots?$$

1. **पहिलो चरण :** पहिलो पङ्क्ति × पहिलो लहर

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \times 1 + 4 \times (-2) & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{bmatrix}$$

2. **दोस्रो चरण :** पहिलो पङ्क्ति × दोस्रो लहर

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \times 1 + 4 \times (-2) & 3 \times (-3) + 4 \times (-5) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{bmatrix}$$

3. **तेस्रो चरण :** दोस्रो पङ्क्ति × पहिलो लहर

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \times 1 + 4 \times (-2) & 3 \times (-3) + 4 \times (-5) \\ 5 \times 1 + 6 \times (-2) & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{bmatrix}$$

4. **चौथो चरण :** दोस्रो पङ्क्ति × दोस्रो लहर

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \times 1 + 4 \times (-2) & 3 \times (-3) + 4 \times (-5) \\ 5 \times 1 + 6 \times (-2) & 5 \times (-3) + 6 \times (-5) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 - 8 & -9 - 20 \\ 5 - 12 & -15 - 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -29 \\ -7 & -45 \end{bmatrix}$$

अत: माथिका चरणहरूबाट, $AB = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -29 \\ -7 & -45 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$ हुन्छ ।

त्यसै गरी BA पत्ता लगाउनुहोस् । के AB र BA बराबर छन् ?

दुईओटा मेट्रिक्स A र B मा पहिलो मेट्रिक्स A को लहरको सङ्ख्या दोस्रो मेट्रिक्स B को पङ्क्तिको सङ्ख्यासँग बराबर छ भने मेट्रिक्सको गुणन गर्न सकिन्छ । मेट्रिक्स A र B को गुणनफललाई AB ले जनाइन्छ । यदि दुईओटा मेट्रिक्सहरू A र B का क्रमहरू क्रमश: $m \times n$ र $n \times p$ छन् भने तिनीहरूको गुणनफल AB को क्रम $m \times p$ हुन्छ । सङ्केतात्मक रूपमा,

$$A_{m \times n} \times B_{n \times p} = (AB)_{m \times p}$$

दुईओटा मेट्रिक्स गुणन गर्न पहिलो मेट्रिक्सको लहरको सङ्ख्या दोस्रो मेट्रिक्सको पङ्क्तिको सङ्ख्यासँग बराबर छ भने मेट्रिक्सको गुणन गर्न सकिन्छ अन्यथा गुणन गर्न सम्भव हुँदैन ।

विचारणीय प्रश्न : मेट्रिक्स B को लहरको सङ्ख्या p र मेट्रिक्स A को पङ्क्तिको सङ्ख्या m छ । के BA पत्ता लगाउन सम्भव छ ?

6.2.1 मेट्रिक्सको गुणनसम्बन्धी गुणहरू (Properties Related to Matrix Multiplication)

1. **क्रमविनिमय नियम (commutative property) :** सामान्यतः मेट्रिक्सको गुणनका लागि क्रमविनिमय नियम सत्य हुँदैन । यदि A र B दुईओटा मेट्रिक्स छन् भने $AB \neq BA$

2. **सङ्घीय नियम (associative property):** यदि A, B र C तीनओटा मेट्रिक्सहरू छन् भने (AB) C र A (BC) गुणन सम्भव भएको अवस्थामा (AB) C = A (BC) हुन्छ, जस्तै :

$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ र $C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$ भए,

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times 4 + 0\times(-2) & 2\times(-1) + 0\times 5 \\ 3\times 4 + 1\times(-2) & 3\times(-1) + 1\times 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8+0 & -2+0 \\ 12-2 & -3+5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 10 & 2 \end{bmatrix}$$

$$BC = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\times 1 + (-1)\times 6 & 4\times 3 + (-1)\times 0 \\ (-2)\times 1 + 5\times 6 & (-2)\times 3 + 5\times 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4-6 & 12-0 \\ -2+30 & -6+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 12 \\ 28 & -6 \end{bmatrix}$$

$$(AB)\,C = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 10 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8\times 1 + (-2)\times 6 & 8\times 3 + (-2)\times 0 \\ 10\times 1 + 2\times 6 & 10\times 3 + 2\times 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8-12 & 24+0 \\ 10+12 & 30+0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore (AB)\,C = \begin{bmatrix} -4 & 24 \\ 22 & 30 \end{bmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (i)$$

त्यसै गरी,

$$A(BC) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 12 \\ 28 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times(-2) + 0\times 28 & 2\times 12 + 0\times(-6) \\ 3\times(-2) + 1\times 28 & 3\times 12 + 1\times(-6) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4+0 & 24+0 \\ -6+28 & 36-6 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A(BC) = \begin{bmatrix} -4 & 24 \\ 22 & 30 \end{bmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (i)$$

अतः समीकरण (i) र (ii) बाट (AB) C = A(BC)

3. **वितरण नियम (distributive property) :** यदि A, B र C तीनओटा मेट्रिक्सहरू छन् भने A(B + C) र (AB + AC) गणना गर्न सम्भव भएको अवस्थामा A (B + C) = AB + AC हुन्छ, जस्तै : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ र $C = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$ भए,

$$(B + C) = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-1 & 4-3 \\ 2+6 & 5+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A(B + C) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times0+2\times8 & 1\times1+2\times5 \\ 0\times0+3\times8 & 0\times1+3\times5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0+16 & 1+10 \\ 0+24 & 0+15 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A(B + C) = \begin{bmatrix} 16 & 11 \\ 24 & 15 \end{bmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(i)}$$

फेरि, $AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times1+2\times2 & 1\times4+2\times5 \\ 0\times1+3\times2 & 0\times4+3\times5 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1+4 & 4+10 \\ 0+6 & 0+15 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 14 \\ 6 & 15 \end{bmatrix}$$

त्यसै गरी, $AC = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times(-1)+2\times6 & 1\times(-3)+2\times0 \\ 0\times(-1)+3\times6 & 0\times(-3)+3\times0 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -1+12 & -3+0 \\ 0+18 & 0+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 11 & -3 \\ 18 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB + AC = \begin{bmatrix} 5 & 14 \\ 6 & 15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11 & -3 \\ 18 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5+11 & 14-3 \\ 6+18 & 15+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 11 \\ 24 & 15 \end{bmatrix}$$

$$\therefore AB + AC = \begin{bmatrix} 16 & 11 \\ 24 & 15 \end{bmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(ii)}$$

अत: समीकरण (i) र (ii) बाट A (B + C) = AB + AC

4. **मेट्रिक्स गुणनको एकात्मक नियम (identity property of matrix multiplication)** यदि समान क्रमका A र I क्रमश: वर्ग मेट्रिक्स एवम् एकात्मक मेट्रिक्स भए, AI = IA = A हुन्छ, जस्तै :

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ र $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ भए,

$$AI = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times1+3\times0 & 2\times0+3\times1 \\ 1\times1+4\times0 & 1\times0+4\times1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2+0 & 0+3 \\ 1+0 & 0+4 \end{bmatrix}$$

$$\therefore AI = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = A \text{.............................(i)}$$

$$IA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times 2 + 0 \times 1 & 1\times 3 + 0\times 4 \\ 0\times 2 + 1\times 1 & 0\times 3 + 1\times 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2+0 & 3+0 \\ 0+1 & 0+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = A$$

$$\therefore IA = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = A \text{.............................(ii)}$$

अतः, समीकरण (i) र (ii) बाट $AI = IA = A$

उदाहरण 1

यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ र $B = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 8 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ भए,

(क) के AB परिभाषित हुन्छ, कारण दिनुहोस् । यदि हुन्छ भने AB पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) के BA परिभाषित हुन्छ, कारण दिनुहोस् । यदि हुन्छ भने BA पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ र $B = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 8 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ छन् । जहाँ A को क्रम 2×3 र B को क्रम 3×2 छ ।

(क) **AB का लागि :** पहिलो मेट्रिक्स A को लहरको सङ्ख्या दोस्रो मेट्रिक्स B को पङ्क्तिको सङ्ख्यासँग बराबर छ । त्यसैले AB परिभाषित हुन्छ ।

$$\text{अब, } AB = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 8 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times(-1)+4\times 8+0\times 3 & 2\times 4+4\times 2+0\times 7 \\ 3\times(-1)+5\times 8+1\times 3 & 3\times 4+5\times 2+1\times 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2+32+0 & 8+8+0 \\ -3+40+3 & 12+10+7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 30 & 16 \\ 40 & 29 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 30 & 16 \\ 40 & 29 \end{bmatrix}$$

अतः $AB = \begin{bmatrix} 30 & 16 \\ 40 & 29 \end{bmatrix}$ हुन्छ ।

(ख) **BA का लागि :** पहिलो मेट्रिक्स B को लहरको सङ्ख्या दोस्रो मेट्रिक्स A को पङ्क्तिको सङ्ख्यासँग बराबर छ । त्यसैले BA परिभाषित हुन्छ ।

$$\text{अब, } BA = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 8 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)\times 2+4\times 3 & (-1)\times 4+4\times 5 & (-1)\times 0+4\times 1 \\ 8\times 2+2\times 3 & 8\times 4+2\times 5 & 8\times 0+2\times 1 \\ 3\times 2+7\times 3 & 3\times 4+7\times 5 & 3\times 0+7\times 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2+12 & -4+20 & 0+4 \\ 16+6 & 32+10 & 0+2 \\ 6+21 & 12+35 & 0+7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & 16 & 4 \\ 22 & 42 & 2 \\ 27 & 47 & 7 \end{bmatrix}$$

अत: $BA = \begin{bmatrix} 10 & 16 & 4 \\ 22 & 42 & 2 \\ 27 & 47 & 7 \end{bmatrix}$ हुन्छ ।

उदाहरण 2

यदि $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ भए, $A^2 - 6A + 9I = O$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् जहाँ I र O, 2×2 क्रम भएका क्रमश: एकात्मक मेट्रिक्स र शून्य मेट्रिक्स हुन् ।

समाधान : यहाँ,

$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, 2×2 क्रम भएका एकात्मक मेट्रिक्स (I) $= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ र शून्य मेट्रिक्स (O) $= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ छन् ।

> Note: A^2 भनेको प्रत्येक सदस्यको वर्ग नभई मेट्रिक्स A लाई A सँग गुणन गर्नु हो ।

अब, $A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 4\times4+1\times(-1) & 4\times1+1\times2 \\ (-1)\times4+2\times(-1) & (-1)\times1+2\times2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 16-1 & 4+2 \\ -4-2 & -1+4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 15 & 6 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$6A = 6\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & 6 \\ -6 & 12 \end{bmatrix}$$

$$9I = 9\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

बायाँ पक्ष, $A^2 - 6A + 9I = \begin{bmatrix} 15 & 6 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 24 & 6 \\ -6 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 15-24+9 & 6-6+0 \\ -6+6+0 & 3-12+9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$= O =$ दायाँ पक्ष

अत:, $A^2 - 6A + 9I = O$ प्रमाणित भयो ।

उदाहरण 3

यदि $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} p & q \\ 0 & r \end{bmatrix}$ र $AB = A + B$ भए p, q र r को माना पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} p & q \\ 0 & r \end{bmatrix}$ र $AB = A + B$

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & q \\ 0 & r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \times p + 0 \times 0 & 4 \times q + 0 \times r \\ 0 \times p + 5 \times 0 & 0 \times q + 5 \times r \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4p + 0 & 4q + 0 \\ 0 + 0 & 0 + 5r \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4p & 4q \\ 0 & 5r \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p & q \\ 0 & r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 + p & 0 + q \\ 0 + 0 & 5 + r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 + p & q \\ 0 & 5 + r \end{bmatrix}$$

प्रश्नअनुसार, $AB = A + B$

अथवा, $\begin{bmatrix} 4p & 4q \\ 0 & 5r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 + p & q \\ 0 & 5 + r \end{bmatrix}$

सङ्गति सदस्यहरूको मान बराबर गर्दा,

अथवा, $4p = 4 + p$
अथवा, $4p - p = 4$
अथवा, $3p = 4$
अथवा, $p = \frac{4}{3}$

अथवा, $4q = q$
अथवा, $4q - q = 0$
अथवा, $3q = 0$
अथवा, $q = 0$

अथवा, $5r = 5 + r$
अथवा, $5r - r = 5$
अथवा, $4r = 5$
अथवा, $r = \frac{5}{4}$

अतः $p = \frac{4}{3}$, $q = 0$ र $r = \frac{5}{4}$

उदाहरण 4

यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$ र $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ भए $(AB)^T = B^T.A^T$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$ र $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 3 + 2 \times 2 & 1 \times 4 + 2 \times 1 \\ 0 \times 3 + 9 \times 2 & 0 \times 4 + 9 \times 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3+4 & 4+2 \\ 0+18 & 0+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 18 & 9 \end{bmatrix}$$

$$(AB)^T = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 18 & 9 \end{bmatrix}^T$$

$$\therefore (AB)^T = \begin{bmatrix} 7 & 18 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (i)$$

त्यसै गरी, $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$ र $B^T = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

$$B^T. A^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\times1+2\times2 & 3\times0+2\times9 \\ 4\times1+1\times2 & 4\times0+1\times9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3+4 & 0+18 \\ 4+2 & 0+9 \end{bmatrix}$$

$$\therefore B^T. A^T = \begin{bmatrix} 7 & 18 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (ii)$$

अतः समीकरण (i) र (ii) बाट $(AB)^T = B^T. A^T$ प्रमाणित भयो ।

अभ्यास 6.2

1. दिइएका प्रश्नहरूको उपयुक्त विकल्पमा ठिक चिह्न (✓) लगाउनुहोस् :

(क) दुई मेट्रिक्सको गुणन तलका मध्ये कुन अवस्थामा सम्भव हुन्छ ?

a. पहिलो मेट्रिक्सको लहरको सङ्ख्या र दोस्रो मेट्रिक्सको पङ्क्ति सङ्ख्यासँग बराबर भएमा ।

b. पहिलो मेट्रिक्सको पङ्क्तिको सङ्ख्या र दोस्रो मेट्रिक्सको लहरको सङ्ख्यासँग बराबर भएमा ।

c. पहिलो मेट्रिक्सको पङ्क्तिको सङ्ख्या र दोस्रो मेट्रिक्सको पङ्क्तिको सङ्ख्यासँग बराबर भएमा ।

d. पहिलो मेट्रिक्सको लहरको सङ्ख्या र दोस्रो मेट्रिक्सको लहरको सङ्ख्यासँग बराबर भएमा ।

(ख) यदि A, B र C तीनओटा मेट्रिक्सहरूमा (AB) C = A (BC) भए यो गुणको नाम कुन हो ?

a. क्रमविनिमय नियम b. सङ्घीय नियम c. वितरण नियम d. एकात्मक नियम

(ग) यदि A, B र C तीनओटा मेट्रिक्सहरूमा A (B + C) = AB + AC हुन्छ भने यो गुणको नाम कुन हो ?

a. क्रमविनिमय नियम b. सङ्घीय नियम c. वितरण नियम d. एकात्मक नियम

(घ) यदि A र I उही क्रमका क्रमशः वर्ग मेट्रिक्स र एकात्मक मेट्रिक्स भए AI = IA = A हुन्छ भने यो गुणको नाम कुन हो ?

a. क्रमविनिमय नियम b. सङ्घीय नियम c. वितरण नियम d. एकात्मक नियम

(ङ) यदि $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ र $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ भए PI को गुणनफल तलका मध्ये कुन हो ?

a. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

(च) यदि $W = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ र $R = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ भए WR मेट्रिक्सको क्रम तलका मध्ये कुन हो ?

a. 3×1 b. 1×3 c. 2×2 d. 3×3

2. दिइएका अवस्थामा मेट्रिक्सहरूको गुणनफल सम्भव भए पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) $\begin{bmatrix} 5 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ (ख) $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 4 \end{bmatrix}$ (ग) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$

(घ) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & -4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 2 & -1 & 10 \end{bmatrix}$ (ङ) $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$ (च) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

4. यदि $Q = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$ भए, Q^2 पत्ता लगाउनुहोस् ।

5. (क) यदि $M = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ र $N = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$ भए, MN र NM पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) यदि $C = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $D = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ र $E = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$ भए, $C(D + E)$ पत्ता लगाउनुहोस् ।

6. (क) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ भए $A^2 = 2A$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

(ख) यदि $X = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$ र $Y = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$ भए, XY शून्य मेट्रिक्स हो भनी प्रमाणित गनुहोस् ।

(ग) यदि $R = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ भए, $R^2 = I$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् जहाँ I भनेको 2×2 क्रम भएको एकात्मक मेट्रिक्स हो ।

7. यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ भए, $A^2 - A + 6I = O$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् जहाँ I र O, 2×2 क्रम भएका क्रमशः एकात्मक मेट्रिक्स र शून्य मेट्रिक्स हुन् ।

8. यदि $U = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ र $V = \begin{bmatrix} p & q \\ 0 & r \end{bmatrix}$ भए, $UV = U + V$ हुन्छ भने p, q, र r को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

9. यदि $X = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ र $Y = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ भए $(XY)^T = Y^T.X^T$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

10. यदि $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$ र $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ भए

(क) $AB \neq BA$ प्रमाणित गर्नुहोस् । ख) $A(BC) = (AB)C$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

(ग) $A(B + C) = AB + AC$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

(घ) $IA = AI = A$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

(ङ) $(AB)^T = B^T.A^T$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

उत्तर

1. (क) (a) (ख) (b) (ग) (c) (घ) (d) (ङ) (a) (च) (d) 2. (क) $x = 8, y = 3$ (ख) $x = \frac{11}{29}, y = \frac{-6}{29}$

3. (क) $[17]$ ख) $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 15 & 12 \end{bmatrix}$ (ग) $[4]$ (घ) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 10 \\ 7 & 24 & -5 \\ 22 & 11 & 78 \end{bmatrix}$ (ङ) $\begin{bmatrix} 34 & 9 \\ 74 & 17 \end{bmatrix}$

(च) शिक्षकलाई देखाउनुहोस् । 4. $\begin{bmatrix} -3 & -6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ 5. (क) $\begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ (ख) $\begin{bmatrix} -5 & 6 \\ -10 & 15 \end{bmatrix}$

6. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् । 7. (क) शिक्षकलाई देखाउकनुहोस् । (ख) सकिँदैन

8. (क) $p = \frac{3}{2}, q = 0, r = \frac{4}{3}$ (ख) $a = 1, b = 2$ (ग) $b = 1$

9. (क) $[-3 \quad 3]$ (ख) $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$ (ग) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ 10. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

6.3 मेट्रिक्सको डिटरमिनान्ट (Determinant of Matrix)

क्रियाकलाप 1

दिइएका सङ्ख्याहरूको ढाँचा अध्ययन गर्नुहोस् र सोधिएका प्रश्नहरूमा छलफल गर्नुहोस् :

(क) $|6|$ (ख) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 9 \end{vmatrix}$

(क) दिइएका सङ्ख्याको स्वरूप कस्तो छ ।

(ख) सङ्ख्याहरूको ढाँचालाई बन्द गर्ने ठाडो रेखाहरूलाई के भनिन्छ ?

(ग) दुबै सङ्ख्या ढाँचाहरूमा भएका साझा विशेषताहरू के के हुन् ?

माथिका सङ्ख्याहरूको ढाँचाहरूमध्ये (क) मा एउटा मात्र सङ्ख्या छ । यसमा एउटा पङ्क्ति र एउटा लहर छ । यो एउटा 1×1 क्रम भएको वर्गाकार मेट्रिक्सको सङ्ख्या ढाँचा हो । दोस्रो सङ्ख्याको ढाँचा (ख) मा दुई पङ्क्ति र दुई लहर छन् । यो 2×2 क्रम भएको वर्गाकार मेट्रिक्सको सङ्ख्या स्वरूप हो ।

प्रत्येक सङ्ख्या ढाँचालाई दुई ठाडा रेखाहरूबिच राख्ने डिटरमिनान्टको सङ्केत हो ।

पङ्क्ति र लहरका रूपमा वर्गाकारमा मिलाएर राखिएका सङ्ख्याहरूको प्रस्तुतीकरणलाई दुईओटा ठाडा रेखाहरूभित्र राखिएको स्वरूपलाई डिटरमिनान्ट भनिन्छ । वर्गाकार मेट्रिक्सको मात्र डिटरमिनान्ट निकाल्न सकिन्छ । डिटरमिनान्ट एउटा स्केलर परिमाण हो । यदि A एउटा वर्गाकार मेट्रिक्स भए, A को डिटरमिनान्टलाई $|A|$ ले जनाइन्छ ।

6.3.1 एक क्रम मेट्रिक्सको डिटरमिनान्ट (Determinant of Order One Matrix)

मानौँ, $A = [8]$ एउटा 1×1 क्रम भएको वर्गाकार मेट्रिक्स हो, त्यसैले $|A| = |8| = 8$ हुन्छ । त्यसै गरी, $B = [-7]$ एउटा 1×1 क्रम भएको वर्गाकार मेट्रिक्स हो, $|B| = |-7| = -7$ हुन्छ ।

कुनै वर्गाकार मेट्रिक्सको एउटा पङ्क्ति र एउटा लहर छन् भने त्यस्तो मेट्रिक्सको डिटरमिनान्टलाई एक क्रमको मेट्रिक्सको डिटरमिनान्ट भनिन्छ । 1×1 क्रम भएको वर्गाकार मेट्रिक्सको डिटरमिनान्ट मान त्यो आफैँसँग बराबर हुन्छ ।

विचारणीय प्रश्न : -7 को निरपेक्ष मान (absolute value) $= |-7|$ कति हुन्छ ? डिटरमिनान्ट र निरपेक्ष मान एकै हो त ?

6.3.2 दुई क्रम मेट्रिक्सको डिटरमिनान्ट (Determinant of Order Two Matrix)

मानौँ, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ एउटा 2×2 क्रम भएको वर्गाकार मेट्रिक्स हो । यसको डिटरमिनान्ट कसरी निकालिन्छ र यो कति हुन्छ, छलफल गर्नुहोस् । मेट्रिक्स A को डिटरमिनान्टलाई D वा $|A|$ ले जनाइन्छ ।

मेट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ को डिटरमिनान्ट, $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ लेखिन्छ । तसर्थ,

$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ हुन्छ । जहाँ a, b, c, र d लाई डिटरमिनान्ट A का सदस्यहरू र $ad - bc$ लाई $|A|$ को विस्तार भनिन्छ ।

फेरि, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ एउटा 2×2 क्रम भएको वर्गाकार मेट्रिक्स हो । मेट्रिक्स B को डिटरमिनान्ट, $|B| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times 1 - 1 \times 3 = 2 - 3 = -1$

कुनै वर्गाकार मेट्रिक्समा दुईओटा पङ्क्ति र दुईओटा लहर छन् भने त्यस्तो मेट्रिक्सको डिटरमिनान्टलाई दुई क्रमको मेट्रिक्सको डिटरमिनान्ट भनिन्छ । डिटरमिनान्टको सदस्यहरूमध्ये मुख्य विकर्ण र सहायक विकर्णका सदस्यहरू क्रमशः गुणन गरेर तिनीहरूको गुणनफललाई घटाउँदा प्राप्त हुने मान नै दुई क्रमको मेट्रिक्सको डिटरमिनान्टको मान हो ।

6.3.3 एकल मेट्रिक्स (Singular Matrix)

मानौँ, $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ एउटा 2×2 क्रम भएको वर्गाकार मेट्रिक्स हो । मेट्रिक्स A को डिटरमिनान्ट,

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times 3 - 6 \times 1 = 6 - 6$

$\therefore |A| = 0$ हुन्छ ।

कुनै वर्गाकार मेट्रिक्स जसको डिटरमिनान्ट मान शून्य हुन्छ भने त्यस्तो मेट्रिक्सलाई एकल मेट्रिक्स (singular matrix) भनिन्छ । यदि वर्गाकार मेट्रिक्स A छ र $|A| = 0$ भएमा A एकल मेट्रिक्स हो ।

6.3.4 नन सिङ्गुलर मेट्रिक्स (Non-singular Matrix)

मानौँ, $M = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ एउटा 2×2 क्रम भएको वर्गाकार मेट्रिक्स हो । मेट्रिक्स M को डिटरमिनान्ट,

$|M| = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 4 \times 6 - 3 \times 5 = 24 - 15$

अतः $|M| = 9 \neq 0$

कुनै वर्गाकार मेट्रिक्स जसको डिटरमिनान्ट मान शून्य हुँदैन भने त्यस्तो मेट्रिक्सलाई नन सिङ्गुलर मेट्रिक्स भनिन्छ । यसलाई नियमित मेट्रिक्स पनि भनिन्छ । यदि वर्गाकार मेट्रिक्स A छ र $|A| \neq 0$ भएमा A नन सिङ्गुलर मेट्रिक्स हो ।

उदाहरण 1

यदि $C = [-12]$ भए $|C|$ पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान यहाँ,

मेट्रिक्स $C = [-12]$

अब सूत्रअनुसार, $[C] = |-12| = -12$

अतः $[C] = -12$ हुन्छ ।

उदाहरण 2

यदि $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ भए $|A|$ पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

मेट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

अब सूत्रअनुसार, $|A| = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$

$= \cos\theta \times \cos\theta - (-\sin\theta) \times \sin\theta$

$= \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

अतः $|A| = 1$ हुन्छ ।

उदाहरण 3

यदि $A = \begin{bmatrix} -1 & x \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ एकल मेट्रिक्स भए x को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

$A = \begin{bmatrix} -1 & x \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$ एउटा एकल मेट्रिक्स हो ।

त्यसैले, $|AB| = 0$

अथवा, $\begin{vmatrix} -1 & x \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 0$

अथवा, $(-1) \times 6 - (-3) \times x = 0$

अथवा, $-6 + 3x = 0$

अथवा, $3x = 6$

अथवा, $x = 2$

अतः $x = 2$ हुन्छ ।

उदाहरण 4

यदि $P = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$ र $Q = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ भए परीक्षण गर्नुहोस् : $|PQ| = |P||Q|$.

समाधान : यहाँ,

$P = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$ र $Q = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$

$|P| = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 5 \times (-4) - (-3) \times 2 = -20 + 6 = -14$

$|Q| = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 4 \times 5 - 2 \times (-3) = 20 + 6 = 26$

$|P|\ |A| = -14 \times 26$

$\therefore |P|\ |Q| = -364$ ....(i)

$$PQ = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \times 4 + (-3) \times (-3) & 5 \times 2 + (-3) \times 5 \\ 2 \times 4 + (-4) \times (-3) & 2 \times 2 + (-4) \times 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 20 + 9 & 10 - 15 \\ 8 + 12 & 4 - 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 & -5 \\ 20 & -16 \end{bmatrix}$$

$|PQ| = \begin{vmatrix} 29 & -5 \\ 20 & -16 \end{vmatrix} = 29 \times (-16) - 20 \times (-5) = -464 + 100$

$\therefore |PQ| = -364$..................................(ii)

समीकरण (i) र (ii) बाट, $|PQ| = |P|.|Q| = -364$

अभ्यास 6.3

1. **दिइएका प्रश्नहरूको उपयुक्त विकल्पमा ठिक चिह्न (✓) लगाउनुहोस् :**

(क) मेट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ भए |A| को मान तलका मध्ये कुन हो ?

a. $bc - ad$ b. $ad - bc$ c. $ac - bd$ d. $bd - ac$

(ख) मेट्रिक्स $A = |-5|$ भए |A| को मान तलका मध्ये कुन हो ?

a. 5 b. $\frac{1}{5}$ c. –5 d. 5^{-1}

(ग) मेट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ भए |A| को मान तलका मध्ये कुन हो ?

a. –12 b. –5 c. 5 d. 10

(घ) $\begin{vmatrix} 2 & x \\ 1 & x \end{vmatrix} = 0$ भए x को मान कति हुन्छ ?

a. 2 b. 1 c. –2 d. 0

2. **दिइएका डिटरमिनान्टको मान पत्ता लगाउनुहोस् :**

(क) $|2|$ (ख) $|-7|$ (ग) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$

(घ) $\begin{vmatrix} sinA & -cosA \\ cosA & sinA \end{vmatrix}$ (ङ) $\begin{vmatrix} x+y & x-y \\ x-y & x+y \end{vmatrix}$ (च) $\begin{vmatrix} x+y & x-y \\ x+y & x-y \end{vmatrix}$

(छ) $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}$ (ज) $\begin{vmatrix} x+y & x-y \\ x^2+xy+y^2 & x^2-xy+y^2 \end{vmatrix}$

3. **दिइएका मेट्रिक्सको डिटरमिनान्टको मान पत्ता लगाउनुहोस् :**

(क) [10] (ख) [–8] (ग) $\begin{bmatrix} x & y \\ y & x \end{bmatrix}$ (घ) $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

(ङ) $\begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ (च) $\begin{bmatrix} -7 & 11 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$

4. **दिइएको अवस्थामा x को मान पत्ता लगाउनुहोस् :**

(क) $\begin{vmatrix} 3 & x \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 20$ (ख) $\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 2x & -3 \end{vmatrix} = 1$ (ग) $\begin{vmatrix} 3x & 2 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = 8$

(घ) $\begin{vmatrix} x & -2x \\ 3x & 4x \end{vmatrix} = 100$

5. यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ र $B = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$ भए दिइएका मेट्रिक्सहरूको डिटरमिनान्ट पत्ता लगाउनुहोस् ।

(क) A –3B (ख) 2A + B (ग) 3A –2B (घ) A + 2B

6. **सिद्ध गर्नुहोस् :**

(क) $\begin{vmatrix} x^2 & y^2 \\ y & x \end{vmatrix} = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$ (ख) $\begin{vmatrix} x+y & y+z \\ z-y & x-y \end{vmatrix} = x^2 - z^2$

(ग) $\begin{vmatrix} a-1 & a^2-a+1 \\ a+1 & a^2+a+1 \end{vmatrix} = -2$ (घ) $\begin{vmatrix} 1+x & 1 \\ 1 & 1+y \end{vmatrix} = xy\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$

7. यदि $M = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ र $N = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$ भए, परीक्षण गर्नुहोस् : $|MN| = |N|\,|M|$

उत्तर

1. (क) (b) (ख) (c) (ग) (c) (घ) (d) 2. (क) 2 (ख) 7 (ग) 5
(घ) 1 (ङ) $4xy$ (च) 0 (छ) 3 (ज) $2y^2$ 3. (क) 10 (ख) –8
(ग) $x^2 - y^2$ (घ) 10 (ङ) 0 (च) 6
4. (क) 2 (ख) 4 (ग) 0 (घ) $\pm\sqrt{10}$
5. (क) 289 (ख) –6 (ग) 74 (घ) 114
6. र 7. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

6.4 विपरीत मेट्रिक्स (Inverse Matrix)

क्रियाकलाप 1

दुईओटा स्वामित्वहीन एकल मेट्रिक्सहरू $A = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ र $B = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$ लिनुहोस् र सोधिएका प्रश्नहरूमा छलफल गरी उत्तर दिनुहोस् :

(क) A ले B लाई गुणन गरी AB पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) B ले A लाई गुणन गरी BA पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) यदि AB र BA एकात्मक मेट्रिक्स $I_{2\times 2}$ सँग बराबर भए A र B कस्ता मेट्रिक्स हुन् ?

अब, $AB = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7\times 3 + 5\times(-4) & 7\times(-5) + 5\times 7 \\ 4\times 3 + 3\times(-4) & 4\times(-5) + 3\times 7 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 21-20 & -35+35 \\ 12-12 & -20+21 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$

फेरि, $BA = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\times 7 + (-5)\times 4 & 3\times 5 + (-5)\times 3 \\ (-4)\times 7 + 7\times 4 & (-4)\times 5 + 7\times 3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 21-20 & 15-35 \\ -28+28 & -20+21 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

माथिको गणनाबाट, $AB = BA = I$ छ । यस्तो अवस्थामा A र B एकआपसमा विपरीत मेट्रिक्स हुन् । जहाँ $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ एउटा 2×2 को एकाइ मेट्रिक्स हो ।

कुनै एउटा वर्ग मेट्रिक्स A का लागि सोही क्रमको अर्को मेट्रिक्स B छ र $AB = BA = I$ छ (जहाँ I एउटा एकाइ मेट्रिक्स हो) भने A र B एकआपसमा विपरीत मेट्रिक्सहरू हुन् । यहाँ $B = A^{-1}$ र $A = B^{-1}$ हुन्छन् । कुनै पनि वर्ग मेट्रिक्स स्वामित्वहीन एकल मेट्रिक्स भएमा मात्र विपरीत मेट्रिक्स परिभाषित हुन्छ ।

6.4.1 दिइएको 2×2 मेट्रिक्सको विपरीत मेट्रिक्स पत्ता लगाउने प्रक्रिया (Process of finding the Inverse of given 2×2 Matrix)

मानौँ, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ भए, $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$

मानौँ, $A^{-1} = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$

विपरीत मेट्रिक्सको परिभाषाअनुसार, $A A^{-1} = I$

अथवा, $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

अथवा, $\begin{bmatrix} ap + br & aq + bs \\ cp + dr & cq + ds \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

विचारणीय प्रश्न : किन $ad - bc \neq 0$ हुनुपर्छ ? $ad - bc = 0$ हुँदा के हुन्छ ?

बराबर मेट्रिक्सको नियमअनुसार,

$ap + br = 1$..............(i) $aq + bs = 0$..............(ii)

$cp + dr = 0$..............(iii) $cq + ds = 1$..............(iv)

समीकरण (i) र (iii) हल गर्दा, $p = \dfrac{d}{ad-bc}$ र $r = \dfrac{-c}{ad-bc}$

समीकरण (ii) र (iv) हल गर्दा, $q = \dfrac{-b}{ad-bc}$ र $s = \dfrac{a}{ad-bc}$

$$\therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{d}{ad-bc} & \dfrac{-b}{ad-bc} \\ \dfrac{-c}{ad-bc} & \dfrac{a}{ad-bc} \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad [\because \tfrac{1}{ad-bc} \text{ साझा लिँदा}]$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

दिइएको मेट्रिक्सको विपरीत मेट्रिक्स पत्ता लगाउँदा मुख्य विकर्णका सदस्यहरूको स्थान साट्ने र अर्को विकर्णका सदस्यहरूको चिह्न परिवर्तन गरी डिटरमिनान्टले भाग गर्नुपर्छ । तसर्थ,

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ भए, } A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \text{ जहाँ } |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$$

6.4.2 विपरीत मेट्रिक्सका गुणहरू (Properties of Inverse Matrix)

क्रियाकलाप 1

यदि $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ भए दिइएका विपरीत मेट्रिक्सका गुणहरू छलफल गरी परीक्षण गर्नुहोस् ।

(क) $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$

(ख) $(AB)^{-1} = B^{-1}.\ A^{-1}$

(ग) $(A^{-1})^{-1} = A$

(घ) $(A^{T})^{-1} = (A^{-1})^{T}$

(ङ) $(I)^{-1} = I$

(च) $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

उदाहरण 1

यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ भए,

(क) $|A|$ पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) A^{-1} पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ भए,

(क) सूत्रअनुसार, $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 \times 2 - 3 \times 1 = 8 - 3 = 5$

(ख) फेरि, सूत्रअनुसार $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{-3}{5} \\ \frac{-1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$

अतः $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ को विपरीत मेट्रिक्स $\begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{-3}{5} \\ \frac{-1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$ हुन्छ ।

उदाहरण 2

यदि $\begin{bmatrix} 2m & 7 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$ को विपरीत मेट्रिक्स $\begin{bmatrix} 9 & n \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$ भए m र n को मानहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

मानौँ, $A = \begin{bmatrix} 2m & 7 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$ र $B = \begin{bmatrix} 9 & n \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$

प्रश्नअनुसार, A को विपरीत मेट्रिक्स B भए AB = I हुन्छ । त्यसैले,

अथवा, $\begin{bmatrix} 2m & 7 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 & n \\ -5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

अथवा, $\begin{bmatrix} 2m \times 9 + 7 \times (-5) & 2m \times n + 7 \times 4 \\ 5 \times 9 + 9 \times (-5) & 5 \times n + 9 \times 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

अथवा, $\begin{bmatrix} 18m - 35 & 2mn + 28 \\ 0 & 5n + 36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

बराबर मेट्रिक्सको नियमअनुसार,

अथवा, $18m - 35 = 1$

अथवा, $18m = 1 + 35$

अथवा, $m = \frac{36}{18} = 2$

अथवा, $5n + 36 = 1$

अथवा, $5n = 1 - 36$

अथवा, $n = \frac{-35}{5} = -7$

अतः $m = 2$ र $n = -7$ हुन्छ ।

उदाहरण 3

मेट्रिक्स A को विपरीत मेट्रिक्स, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ भए मेट्रिक्स A पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

A को विपरीत मेट्रिक्स, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ छ ।

मानौँ, $|A^{-1}| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 \times 1 - 3 \times 2 = 4 - 6 = -2$

विपरीत मेट्रिक्स, $(A^{-1})^{-1} = \frac{1}{|A^{-1}|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

$$= \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\therefore (A^{-1})^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

हामीलाई थाहा छ, $(A^{-1})^{-1} = A$

अतः मेट्रिक्स, $A = \begin{bmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

उदाहरण 4

यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$ र $B = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}$ भए प्रमाणित गर्नुहोस् : $(AB)^{-1} = B^{-1}. A^{-1}$

समाधान : यहाँ,

$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$ र $B = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}$

प्रश्नअनुसार, $AB = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ -3 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \times (-2) + 2 \times (-3) & 3 \times 7 + 2 \times 9 \\ 7 \times (-2) + 5 \times (-3) & 7 \times 7 + 5 \times 9 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -6 - 6 & 21 + 18 \\ -14 - 15 & 49 + 45 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -12 & 39 \\ -29 & 94 \end{bmatrix}$

$|AB| = \begin{vmatrix} -12 & 39 \\ -29 & 94 \end{vmatrix} = -12 \times 94 - 39 \times (-29) = -1128 + 1131 = 3$

फेरि, सूत्रअनुसार, $(AB)^{-1} = \frac{1}{|AB|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

$\therefore (AB)^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 94 & -39 \\ 29 & -12 \end{bmatrix}$ ....(i)

$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 14 = 1$ र $|B| = \begin{vmatrix} -2 & 7 \\ -3 & 9 \end{vmatrix} = -18 + 21 = 3$

सूत्रअनुसार, $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$ र

$B^{-1} = \frac{1}{|B|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 9 & -7 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

अब, $B^{-1} A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 9 & -7 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 9 \times 5 + (-7)(-7) & 9 \times (-2) + (-7) \times 3 \\ 3 \times 5 + (-2)(-7) & 3 \times (-2) + (-2) \times 3 \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 45 + 49 & -18 - 21 \\ 15 + 14 & -6 - 6 \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 94 & -39 \\ 29 & -12 \end{bmatrix}$

$\therefore B^{-1} A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 94 & -39 \\ 29 & -12 \end{bmatrix}$ ....(ii)

समीकरण (i) र (ii) बाट

$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 94 & -39 \\ 29 & -12 \end{bmatrix}$ प्रमाणित भयो ।

अभ्यास 6.4

1. **दिइएका प्रश्नहरूको उपयुक्त विकल्पमा ठिक चिह्न (✓) लगाउनुहोस् :**

(क) मेट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ भए A^{-1} मेट्रिक्स तलका मध्ये कुन हो ?

a. $\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ b. $\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} a & -b \\ -c & d \end{bmatrix}$ c. $\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ d. $\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} -d & b \\ c & -a \end{bmatrix}$

(ख) तलका मध्ये कुन अवस्थामा मेट्रिक्स A को विपरीत मेट्रिक्स A^{-1} परिभाषित हुँदैन ?

a. यदि मेट्रिक्स A एकल मेट्रिक्स भएमा b. यदि मेट्रिक्स A स्वामितहीन मेट्रिक्स भएमा

c. यदि मेट्रिक्स A वर्ग मेट्रिक्स भएमा d. यदि मेट्रिक्स A एकात्मक मेट्रिक्स भएमा

(ग) दिइएका गुणहरूमध्ये कुन गुण विपरीत मेट्रिक्सको गुण हो ?

a. $(A^T)^T = A$ b. $(A^{-1})^{-1} = A$

c. $(AB)^T = B^T A^T$ d. $AI = IA = A$

(घ) मेट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ भए A^{-1} मेट्रिक्स तलका मध्ये कुन हो ?

a. $\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ b. $\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ c. $\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ d. $\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

2. **दिइएका मेट्रिक्सहरू गुणन गर्नुहोस् र तिनीहरू एकआपसमा विपरीत मेट्रिक्स हुन् भनी प्रमाणित गर्नुहोस् :**

(क) $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ र $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ (ख) $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ र $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

(ग) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ र $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$ (घ) $A = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$ र $B = \begin{bmatrix} 9 & -7 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$

3. **दिइएका मेट्रिक्सहरूको विपरीत मेट्रिक्स पत्ता लगाउनुहोस् :**

(क) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ (ख) $B = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ (ग) $P = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ (घ) $R = \begin{bmatrix} cosA & -sinA \\ sinA & cosA \end{bmatrix}$

4. **दिइएका मेट्रिक्सहरू एकअर्काका विपरीत मेट्रिक्सहरू भए *a, b* अथवा *p, q* का मानहरू पत्ता लगाउनुहोस् :**

(क) $\begin{bmatrix} a & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ र $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & b \end{bmatrix}$ (ख) $\begin{bmatrix} p & 2p-9 \\ -q & 3 \end{bmatrix}$ र $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ q & p \end{bmatrix}$

5. मेट्रिक्स A को विपरीत मेट्रिक्स $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ भए मेट्रिक्स A पत्ता लगाउनुहोस् ।

6. यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ र $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$ भए,

(क) $|A|$ र $|B|$ पत्ता लगाउनुहोस् । (ख) A^{-1} र B^{-1} पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) $(AB)^{-1}$ पत्ता लगाउनुहोस् । (घ) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ हुन्छ भनी परीक्षण गर्नुहोस् ।

उत्तर

1\. (क) (c) ख) (a) (ग) (b) (घ) (d) 2. शिक्षकलाई देखाउनुहोस्

3\. (क) $\begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{-1}{5} \\ \frac{-3}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$ (ख) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ \frac{-3}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$ (ग) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{-3}{2} & 1 \end{bmatrix}$ (घ) $\begin{bmatrix} cosA & sinA \\ -sinA & cosA \end{bmatrix}$

4\. (क) $a = 3, b = 3$ (ख) $p = 2, q = 2$

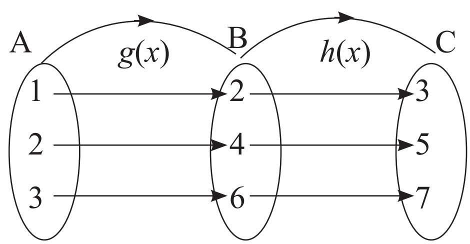
5\. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ 6. (क) 6, 1 (ख) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{-5}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}$ (ग) $\begin{bmatrix} \frac{11}{6} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-41}{6} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$ (घ) शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

परियोजना कार्य

मेट्रिक्स, डिटरमिनान्ट र विपरीत मेट्रिक्सको वास्तविक जीवनमा हुने उपयोगिता के के छन्, खोजी गर्नुहोस् र उदाहरणसहित न्यूजप्रिन्टमा तयार पारी कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

मिश्रित अभ्यास – विषयक्षेत्रगत

1\. दिइएको मिलानचित्रमा समूह A देखि समूह B सम्म फलन $g(x)$ तथा समूह B देखि समूह C सम्म फलन $h(x)$ परीभाषित छन् । यी दुई मिलानचित्रको अवलोकन गरी तलका प्रश्नहरूको उत्तर दिनुहोस् :



(क) फलन A देखि C लाई जनाउने संयुक्त फलनलाई सङ्केतमा लेख्नुहोस् ।

(ख) संयुक्त फलन A देखि C लाई क्रमजोडाका रूपमा लेख्नुहोस् ।

(ग) के संयुक्त फलन A देखि C को विपरीत फलन परिभाषित हुन्छ, परिभाषित हुन्छ भने क्रमजोडाका रूपमा लेख्नुहोस् ।

2\. यदि फलन $f(x) = 2x + 3$ र $g(x) = x - 2$ भए,

(क) संयुक्त फलन $fg(x)$ र $g^{-1}f(x)$ पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) फलन $f(x)$ लाई फलन $g(x)$ ले भाग गर्दा भागफल र शेष कति कति आउँछ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) दुई चलयुक्त रेखीय असमानता $2x + 3y > 6$ लाई लेखाचित्रमा देखाउनुहोस् ।

(घ) सर्डयुक्त समीकरण भनेको के हो ? सर्डयुक्त समीकरण : $\sqrt{2x+3} = 1$ लाई हल गरी जाँचेर हेर्नुहोस् ।

3. बहुपदीयहरू $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8$ र $d(x) = x + 2$ छन् ।

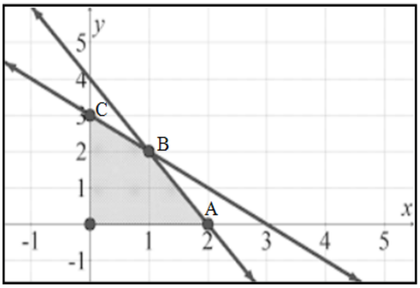
(क) बहुपदीय $f(x)$ लाई $d(x)$ ले भाग गर्दा शेष कति आउँछ, लेख्नुहोस् ।

(ख) के बहुपदीय $f(x)$ को एउटा गुणनखण्ड बहुपदीय $d(x)$ हो, कारण दिनुहोस् ।

(ग) बहुपदीय $f(x)$ को आनुपातिक मूल साध्य प्रयोग गरी गुणनखण्डहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

(घ) $d(x)$ एउटा फलन हुँदा $d^{-1}(x)$ कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

4. सँगै दिइएको असमानता पद्धतिहरूको लेखाचित्रबाट अवलोकन गरी निम्नलिखित प्रश्नहरूको उत्तर दिनुहोस् :



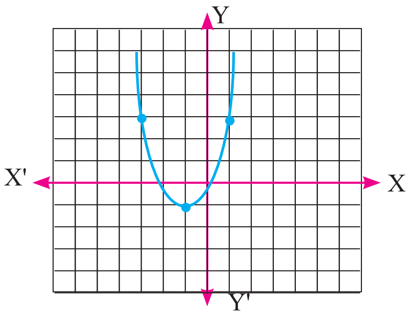
(क) लेखाचित्रका विन्दुहरू O, A, B र C का निर्देशाङ्कहरू लेख्नुहोस् ।

(ख) ती असमानताहरूलाई मान्य हुने मानहरूबाट उद्देश्य फलन : $f(x, y) = 20x + 15y$ को अधिकतम र न्यूनतम मान निकाल्नुहोस् ।

(ग) लेखाचित्रबाट छाया पारिएको भागले जनाउने चारओटा असमानताहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

(घ) रेखा AB को समीकरणलाई $f(x)$ र BC को समीकरणलाई $g(x)$ फलन लिई $f \circ g(x)$ पत्ता लगाउनुहोस् ।

5. सँगै दिइएको असमानता पद्धतिहरूको लेखाचित्रबाट अवलोकन गरी निम्नलिखत प्रश्नहरूको उत्तर दिनुहोस् :



(क) दिइएको लेखाचित्रमा वक्रको नाम के हो, लेख्नुहोस् ।

(ख) उक्त वक्रको शीर्षविन्दु निर्देशाङ्क लेख्नुहोस् ।

(ग) उक्त वक्रको सममितीय अक्षको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

(घ) सो वक्रको समीकरण के हुन्छ, निकाल्नुहोस् ।

6. यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$ भए,

(क) A^{-1} परिभाषित हुन्छ वा हुँदैन, कारणसहित लेख्नुहोस् ।

(ख) यदि A^{-1} परिभाषित हुन्छ भने A^{-1} पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) A^2 मेट्रिक्सको नतिजा $\begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 16 & 49 \end{bmatrix}$ र $\begin{bmatrix} 16 & -27 \\ -36 & 61 \end{bmatrix}$ मध्ये कुन हो, पत्ता लगाउनुहोस् ।

7. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ र $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$ भए,

(क) क्रम परिवर्तन मेट्रिक्स भनेको के हो, लेख्नुहोस् ।

(ख) $(A + B)^T = B^T + A^T$ हुन्छ भनी परीक्षण गर्नुहोस् ।

(ग) के AB पत्ता लगाउन सम्भव हुन्छ, कारण दिनुहोस् ।

(घ) AB सम्भव छ भने $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ हुन्छ भनी परीक्षण गर्नुहोस् ।

8. यदि $P = \begin{bmatrix} 2m & 7 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$ को विपरीत मेट्रिक्स $Q = \begin{bmatrix} 9 & n \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$ भए,

(क) एकाइ मेट्रिक्सको डिटरमिनान्ट कति हुन्छ, लेख्नुहोस् ।

(ख) m र n को मानहरू पत्ता लगाउनुहोस् । (ग) P को डिटरमिनान्ट पत्ता लगाउनुहोस् ।

(घ) Q^T पत्ता लगाउनुहोस् ।

9. यदि $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ र $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$ भए,

(क) विपरीत मेट्रिक्स परिभाषित गर्नुहोस् ।

(ख) के $[(A + B)^T]^T$ सँग $(A + B)$ समतुल्य हुन्छ, गणना गरी कारणसहित लेख्नुहोस् ।

(ग) BA को डिटरमिनान्ट पत्ता लगाउनुहोस् ।

उत्तर

1. (क) $hg(x)$ (ख) $f: A \to C = hg(x) = \{(1, 3), (2, 5), (3, 7), (4, 9)\}$

(ग) संयुक्त फलन A देखि C को विपरीत फलन परिभाषित हुन्छ, किनकि फलन A देखि C एक एक सम्पूर्ण फलन हो । $f^{-1}: C \to A = \{(3, 1), (5, 2), (7, 3), (9, 4)\}$ 2. (क) $2x - 1, 2x + 5$ (ख) 2, 7 (ग) र (घ) शिक्षकलाई देखाउनुहोस् । 3. (क) 0 (ख) हो, शेष 0 आएकाले बहुपदीय $d(x)$, बहुपदीय $f(x)$ को एउटा गुणनखण्ड हो । (ग) $(x + 2), (x - 2), (x - 2)$ (घ) $x - 2$

4. (क) O(0, 0), A(2, 0), B(1, 2), C(0, 3) (ख) न्यूनतम मान = 0, विन्दु O(0, 0) र अधिकतम मान = 50, विन्दु O(1, 2) (ग) $x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 3, 2x + y \leq 4$ (घ) $2x - 2$

5. (क) पाराबोला (ख) (–1, –1) (ग) $x = -1$ (घ) $y = (x + 1)^2 - 1$

6. (क) शिक्षकलाई देखाउनुहोस् । (ख) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ (ग) $A^2 = \begin{bmatrix} 16 & -27 \\ -36 & 61 \end{bmatrix}$

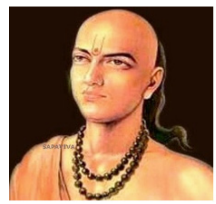
7. (क) र (ख) शिक्षकलाई देखाउनुहोस् । (ग) छ, किनकि, A को लहर सङ्ख्या B को पङ्क्ति सङ्ख्यासँग बराबर छ । (घ) शिक्षकलाई देखाउनुहोस् । 8. (क) 1 (ख) m = 2, n = –7 (ग) 1 (घ) $\begin{bmatrix} 9 & -5 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}$

9. (क) शिक्षकलाई देखाउनुहोस् । (ख) $[(A + B)^T]^T = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -8 & 6 \end{bmatrix}$ (ग) 2

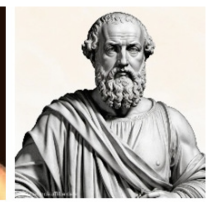
पाठ 7 त्रिकोणमिति (Trigonometry)

7.1 परिचय (Introduction)

त्रिभुजका भुजा र कोणहरूबिचको सम्बन्धको अध्ययन गर्ने गणितको शाखालाई त्रिकोणमिति भनिन्छ । त्रिकोणमितिको विकास सयौँ वर्ष अगाडिदेखि सुरु भएको मानिन्छ । प्राचीन इजिप्ट र बेबिलोनका मानिसले पिरामिडको निर्माण गर्न त्रिभुजका कोण र भुजाको सम्बन्ध प्रयोग गरेका थिए । यसका साथै उनीहरूले तारा नक्षत्रहरूको स्थिति मापन गर्न पनि यसको प्रारम्भिक रूपमा प्रयोग गरेका थिए । पछि ग्रिक गणितज्ञ Hipparchus ले वृत्तका जीवाहरू प्रयोग गरी त्रिकोणमितीय तालिका तयार पारेका थिए । त्यसैले उनलाई त्रिकोणमितिका पिता भन्ने गरिन्छ ।



Aarya Bhatta



Hipparchus

त्रिकोणमितिलाई आजको स्वरूपमा ल्याउन भारतीय गणितज्ञ Aarya Bhatta ले sine (jya) र cosine को अवधारणा विकास गरेका थिए । त्यसपछि इस्लामिक विद्वान्हरूले tangent र cotangent को अवधारणा विकास गरे । त्यसपछि Leonhard Euler ले त्रिकोणमितिलाई फलनको रूप दिए । यसको प्रयोगबाट दैनिक जीवनदेखि विज्ञान, प्रविधि, इन्जिनियरिङ, भूमापन, वास्तुकला र खगोलशास्त्रसम्मका समस्याहरू समाधान गर्न सकिन्छ ।

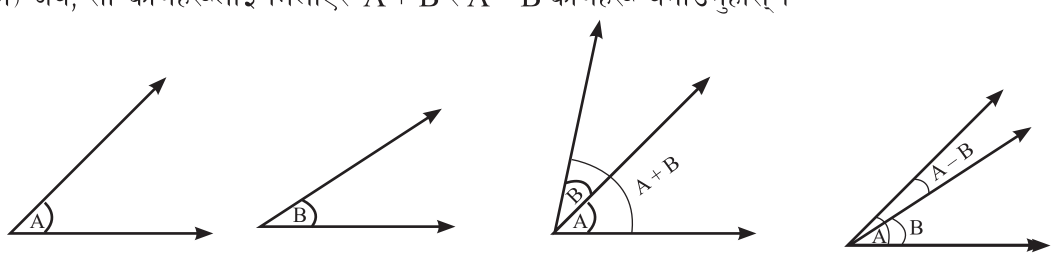
7.2 मिश्रित कोणहरू (Compound Angles)

क्रियाकलाप 1

(क) सिन्काहरू अथवा जुस पाइपको प्रयोग गरी चित्रमा देखाइएका जस्ता कोणहरू बनाउनुहोस् ।

(ख) ती कोणहरूमध्ये ठुलो कोणलाई A र सानो कोणलाई B नाम दिनुहोस् ।

(ग) अब, ती कोणहरूलाई मिलाएर A + B र A – B कोणहरू बनाउनुहोस् ।



दुई वा दुईभन्दा बढी कोणहरूलाई जोडेर वा घटाएर बनेको कोणलाई मिश्रित कोण भनिन्छ । यदि A र B दुईओटा कोणहरू हुन् भने A + B र A – B मिश्रित कोण हुन् ।

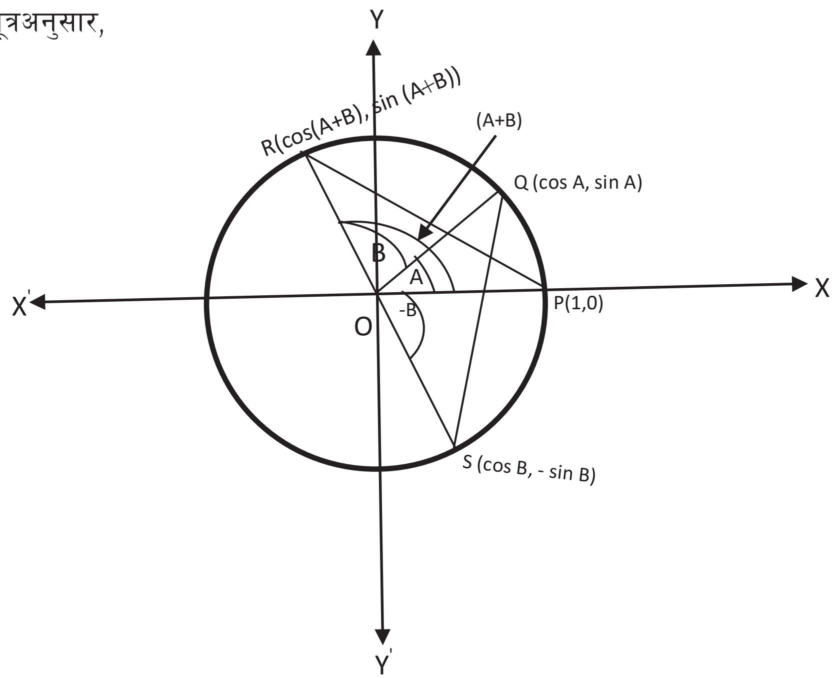
7.2.1 मिश्रित कोणहरू A + B र A – B का त्रिकोणमितीय अनुपात
(Trigonometric Ratios of Compound Angles A + B and A – B)

cos (A + B) र cos (A – B) का त्रिकोणमितीय अनुपात

चित्रमा, केन्द्र O र एक एकाइ अर्धव्यास भएको एउटा वृत्त खिचिएको छ। ∠POQ = A र ∠QOR = B मानौँ। तब, ∠POR = (A + B) हुन्छ। ∠POS = B बनाऔँ। तब, ∠QOS = (A – B) हुन्छ। विन्दु P (1, 0) X - अक्षमा परेको छ।

चित्रमा विन्दुहरू Q, R र S का निर्देशाङ्कहरू क्रमशः Q(cos A, sin A), R(cos(A+B), sin(A– B) र S (cos B, –sin B) लेख्न सकिन्छ।

अब दुरी सूत्रअनुसार,



$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$PR = \sqrt{\{\cos(A+B) - 1\}^2 + \{\sin(A+B) - 0\}^2}$$

$$= \sqrt{\cos^2(A+B) - 2\cos(A+B) + 1 + \sin^2(A+B)}$$

$$= \sqrt{\cos^2(A+B) + \sin^2(A+B) - 2\cos(A+B) + 1}$$

$$[\because sin^2 A + cos^2 A = 1$$

$$= \sqrt{1 - 2\cos(A+B) + 1}$$

$= \sqrt{2 - 2\cos(A+B)}$

QS $= \sqrt{(\cos B - cosA)^2 + (-\sin B - sinA)^2}$

$= \sqrt{cos^2B - 2cosA\ cosB\ + cos^2A + sin^2B + 2sinA\ sinB\ + sin^2A}$

$= \sqrt{sin^2B\ + cos^2B\ + sin^2A\ + cos^2A - 2cosA\ cosB + 2sinA\ sinB}$

$= \sqrt{1 + 1 - 2cosA\ cosB + 2sinA\ sinB}$ $\quad [\because\ sin^2A + \ cos^2A = 1$

$= \sqrt{2 - 2(cosA\ cosB\ - sinA\ sinB)}$

वृत्तमा बराबर केन्द्रीय कोण बनाउने जीवाहरू PR र QS बराबर हुने भएकाले,

PR = QS

$\sqrt{2 - 2\cos(A+B)} = \sqrt{2 - 2(cosA\ cosB\ - sinA\ sinB)}$

अथवा, 2 – 2cos (A + B) = 2 – 2(cos A Cos B – Sin A Sin B)

अतः cos (A + B) = cos A cos B – sin A sin B

र cos (A – B) = cos {A + (–B)}

= cos A cos (–B) – sin A sin (–B)

= cos A cos B + sin A sin B

अब, sin (A + B) = cos {90^0 – (A + B)}

= cos{(90^0 – A) – B)}

= cos (90^0 – A) cosB + sin (90^0 – A) sinB

= sin A cos B + cos A sin B

र sin (A – B) = sin{A + (–B)}

= sin A cos (–B) + cos A sin (–B)

= sin A cos B – cos A sin B

$$\tan(A+B) = \frac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)}$$

$$= \frac{\sin A \cos B + \cos A \sin B}{cosA\ cosB - sinA\ sinB}$$

$$= \frac{\frac{\sin A\cos B}{\cos A\cos B} + \frac{\cos A\sin B}{\cos A\cos B}}{\frac{\cos A\cos B}{\cos A\cos B} - \frac{\sin A\sin B}{\cos A\cos B}} = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B}$$

अतः $\tan (A + B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B}$

त्यस्तै गरी, $\tan(A - B) = \dfrac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A\tan B}$

मिश्रित कोणका त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाहरू

1. $\cos (A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$
2. $\cos (A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$
3. $\sin (A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$
4. $\sin (A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$
5. $\tan (A + B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$
6. $\tan (A - B) = \dfrac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$

उदाहरण 1

प्रमाणित गर्नुहोस् : (क्याल्कुलेटर प्रयोग नगरी)

$\sin 15^0 = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$

समाधान : यहाँ,

L.H.S $= \sin 15°$

$= \sin (45° - 30°)$

$= \sin 45° \cos 30° - \cos 45° \sin 30°$

$= \dfrac{1}{\sqrt{2}} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{\sqrt{2}} \times \dfrac{1}{2}$

$= \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

$= \dfrac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$ = R.H.S, प्रमाणित भयो ।

अर्को तरिका

$\sin 15° = \sin (60° - 45°)$

$= \sin 60° \cos 45° - \cos 60° \sin 45°$

$= \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times \dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$= \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

$= \dfrac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$ = R.H.S, प्रमाणित भयो ।

उदाहरण 2

यदि $\sin A = \dfrac{3}{5}$ र $\cos B = \dfrac{5}{13}$, भए $\sin (A + B)$ र $\tan (A - B)$ का मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

$\sin A = \frac{3}{5}$ र $\cos B = \frac{5}{13}$

$\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A}$

$= \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2}$

$= \sqrt{1 - \frac{9}{25}}$

$= \sqrt{\frac{25-9}{25}}$

$= \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$

$\sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B}$

$= \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2}$

$= \sqrt{1 - \frac{25}{169}}$

$= \sqrt{\frac{169-25}{169}}$

$= \sqrt{\frac{144}{169}}$

$= \frac{12}{13}$

अब, $\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

$$= \frac{3}{5} \times \frac{5}{13} + \frac{4}{5} \times \frac{12}{13} = \frac{15}{65} + \frac{48}{65} = \frac{15 + 48}{65} = \frac{63}{65}$$

अत: $\sin(A + B) = \frac{63}{65}$

फेरि, $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$

$\tan B = \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{\frac{12}{13}}{\frac{5}{13}} = \frac{12}{5}$

$$\tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B} = \frac{\frac{3}{4} - \frac{12}{5}}{1 + \frac{3}{4} \times \frac{12}{5}} = \frac{\frac{15-48}{20}}{\frac{20+36}{20}} = \frac{-33}{56}$$

अत: $\tan(A - B) = \frac{-33}{56}$

उदाहरण 3

प्रमाणित गर्नुहोस् (क्याल्कुलेटर प्रयोग नगरी)

$\sin 105° - \cos 75° = \frac{1}{\sqrt{2}}$

समाधान : यहाँ,

L.H.S $= \sin 105° - \cos 75°$

$= \sin(60° + 45°) - \cos(45° + 30°)$

$= \sin 60° \cos 45° + \cos 60° \sin 45° - (\cos 45° \cos 30° - \sin 45° \sin 30°)$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1+1}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}}$$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} =$ R.H.S, प्रमाणित भयो ।

उदाहरण 4

प्रमाणित गर्नुहोस् : $\sin(28° + \alpha) \cos(62° - \alpha) + \cos(28° + \alpha) \sin(62° - \alpha) = 1$

समाधान यहाँ,

L.H.S $= \sin(28° + \alpha) \cos(62° - \alpha) + \cos(28° + \alpha) \sin(62° - \alpha)$

मानौं, $28° + \alpha = A$ र $62° - \alpha = B$

$= \sin(28° + \alpha) \cos(62° - \alpha) + \cos(28° + \alpha) \sin(62° - \alpha)$

$= \sin A \cos B + \cos A \sin B$

$= \sin(A + B)$

$= \sin(28° + \alpha + 62° - \alpha)$

$= \sin 90°$

$= 1 =$ R.H.S, प्रमाणित भयो ।

उदाहरण 5

प्रमाणित गर्नुहोस् : $\cot(A + B) = \dfrac{\cot A \cot B - 1}{\cot B + \cot A}$

समाधान यहाँ,

L.H.S $\cot(A + B) = \dfrac{\cos(A+B)}{\sin(A+B)} = \dfrac{\cos \cos B - \sin A \sin B}{\sin A \cos B + \cos A \sin B}$

$$= \frac{\dfrac{\cos A \cos B}{\sin A \sin B} - \dfrac{\sin A \sin B}{\sin A \sin B}}{\dfrac{\sin A \cos B}{\sin A \sin B} + \dfrac{\cos A \sin B}{\sin A \sin B}}$$

(अंश र हरलाई $\sin A \sin B$ ले भाग गर्दा)

$= \dfrac{\cot A \cot B - 1}{\cot B + \cot A} =$ R.H.S, प्रमाणित भयो ।

उदाहरण 6

यदि $A + B = \left(\frac{3\pi}{4}\right)^c$ भए प्रमाणित गर्नुहोस् : $(1 - \tan A)(1 - \tan B) = 2$

समाधान यहाँ,

$A + B = \left(\frac{3\pi}{4}\right)^c$

अथवा, $\tan(A + B) = \tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)^c$

अथवा, $\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = \tan 135^0$

अथवा, $\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = -1$

अथवा, $\tan A + \tan B = -1 + \tan A \tan B$

अथवा, $1 = -\tan A - \tan B + \tan A \tan B$

अथवा, $1 + 1 = 1 - \tan A - \tan B + \tan A \tan B$ (दुबैतिर 1 जोड्दा)

अथवा, $2 = 1(1 - \tan A) - \tan B(1 - \tan A)$

अथवा, $2 = (1 - \tan A)(1 - \tan B)$

अतः $(1 - \tan A)(1 - \tan B) = 2$, प्रमाणित भयो ।

उदाहरण 7

प्रमाणित गर्नुहोस् : $\cos(A + B) + \cos(A - B) = 2\cos A \cos B$

समाधान : यहाँ,

L.H.S $= \cos(A + B) + \cos(A - B)$

$= \cos A \cos B - \sin A \sin B + \cos A \cos B + \sin A \sin B$

$= 2\cos A \cos B$ = R . H. S, प्रमाणित भयो ।

उदाहरण 8

प्रमाणित गर्नुहोस् : $\frac{\cos 10^\circ + \sin 10^\circ}{\cos 10^\circ - \sin 10^\circ} = \cot 35^\circ$

समाधान : यहाँ,

R.H.S $= \cot 35^\circ = \frac{\cos 35^\circ}{\sin 35^\circ} = \frac{\cos(45^\circ - 10^\circ)}{\sin(45^\circ - 10^\circ)}$

$= \frac{\cos 45^\circ \cos 10^\circ + \sin 45^\circ \sin 10^\circ}{\sin 45^\circ \cos 10^\circ - \cos 45^\circ \sin 10^\circ}$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\cos10^\circ + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 10^\circ}{\frac{1}{\sqrt{2}}\cos10^\circ - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 10^\circ}$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos10^\circ + \sin 10^\circ)}{\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos10^\circ - \sin 10^\circ)}$$

$$= \frac{\cos10^\circ + \sin 10^\circ}{\cos10^\circ - \sin 10^\circ}$$

= L. H. S, प्रमाणित भयो ।

उदाहरण 9

प्रमाणित गर्नुहोस् : $\tan28^\circ + \tan17^\circ + \tan28^\circ \tan17^\circ = 1$

समाधान

यहाँ, मिश्रित कोणका रूपमा लेख्दा, $28^\circ + 17^\circ = 45^\circ$

दुबैतिर tan लिँदा, $\tan(28^\circ + 17^\circ) = \tan45^\circ$

अथवा, $\frac{\tan28^\circ + \tan17^\circ}{1 - \tan28^\circ . \tan17^\circ} = 1$

अथवा, $\tan28^\circ + \tan17^\circ = 1 - \tan28^\circ . \tan17^\circ$

अथवा, $\tan28^\circ + \tan17^\circ + \tan28^\circ \tan17^\circ = 1$

अतः L.H.S = R. H. S, प्रमाणित भयो ।

अभ्यास 7.1

1. **दिइएका प्रश्नहरूको उपयुक्त विकल्पमा ठिक चिह्न (✓) लगाउनुहोस् :**

(क) sin (A + B) तलका मध्ये कुनसँग बराबर हुन्छ ?

a. sinA cosB – cosA sinB b. sinA cosB + cosA sinB

c. cosA cosB – sinA sinB d. sinA cosA + cosB sinB

(ख) cos (A – B) तलका मध्ये कुनसँग बराबर हुन्छ ?

a. sinA cosB – cosA sinB b. sinA cosB + cosA sinB

c. cosA cosB + sinA sinB d. sinA cosA + cosB sinB

(ग) यदि $A = 30^\circ$ र $B = 60^\circ$ भए sin (A + B) को मान कति हुन्छ ?

a. 0 b. 1 c. $\frac{1}{2}$ d. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(घ) यदि $\sin(A+B) = \frac{1}{2}$ र $B = 30°$ भए A को मान कति हुन्छ ?

a. $0°$ b. $30°$

c. $45°$ d. $60°$

(ङ) तलका मध्ये कुन सम्बन्ध ठिक छ ?

a. $\tan(A+B) = \tan A + \tan B$ b. $\tan(A+B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$

c. $\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 + \tan A \tan B}$ d. $\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$

2. प्रमाणित गर्नुहोस् : (क्याल्कुलेटर वा तालिका प्रयोग नगरी)

(क) $\cos 15° = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ (ख) $\sin 75° = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ (ग) $\tan 75° = 2 + \sqrt{3}$

(घ) $\cos 105° = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ (ङ) $\tan 105° = -(2+\sqrt{3})$ (च) $\cot 15° = (2+\sqrt{3})$

3. यदि $\sin A = \frac{3}{5}$ र $\cos B = \frac{12}{13}$ भए मान पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) $\sin(A+B)$ (ख) $\cos(A+B)$ (ग) $\sin(A-B)$

(घ) $\cos(A-B)$ (ङ) $\tan(A+B)$ (च) $\cot(A-B)$

4. प्रमाणित गर्नुहोस् :

(क) $\sin(A+B) + \sin(A-B) = 2\sin A\cos B$

(ख) $\sin(A+B) - \sin(A-B) = 2\cos A\sin B$

(ग) $\cos(A+B) + \cos(A-B) = 2\cos A\cos B$

(घ) $\cos(A+B) - \cos(A-B) = 2\sin A\cos B$

5. प्रमाणित गर्नुहोस् : (क्याल्कुलेटर वा तालिका प्रयोग नगरी)

(क) $\sin 75° - \sin 15° = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (ख) $\cos 15° - \sin 75° = \frac{1}{\sqrt{2}}$

(ग) $\sin 105° - \cos 75° = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (घ) $\cos 105° + \cos 15° = \frac{1}{\sqrt{2}}$

(ङ) $\tan 15° + \cot 15° = 4$ (छ) $\cos 18° - \sin 18° = \sqrt{2}\sin 27°$

(ज) $\sin 35° + \cos 35° = \sqrt{2}\cos 10°$ (झ) $\sqrt{3}\cos 20° + \sin 20° = 2\sin 80°$

6. प्रमाणित गर्नुहोस् :

(क) $\sin(25° + \alpha) . \cos(65° - \alpha) + \cos(25° + \alpha) . \sin(65° - \alpha) = 1$

(ख) $\cos(25° + \alpha) . \cos(65° + \alpha) - \sin(25° + \alpha) . \sin(65° + \alpha) = -\sin 2\alpha$

(ग) $\cos(60° + \beta) - \cos\beta + \cos(60° - \beta) = 0$

(घ) $\dfrac{\tan(45° + \phi) - \tan\phi}{1 + \tan(45° + \phi)\tan\phi} = 1$

7. यदि $A + B = \left(\frac{\pi}{4}\right)^c$ भए प्रमाणित गर्नुहोस् :

(क) $\tan A + \tan B + \tan A \tan B = 1$

(ख) $(1 + \tan A)(1 + \tan B) = 2$

8. (क) यदि $\tan X = \frac{2}{3}$ र $\tan Y = \frac{1}{5}$, भए $X + Y = 90^0$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

(ख) यदि $\tan A = m$ र $\tan B = \frac{1}{m}$, भए $A + B = \left(\frac{\pi}{4}\right)^c$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

9. प्रमाणित गर्नुहोस् :

(क) $\dfrac{\cos 35° - \sin 35°}{\cos 35° + \sin 35°} = \tan 10°$

(ख) $\dfrac{\cos 17° + \sin 17°}{\cos 17° - \sin 17°} = \tan 62°$

(ग) $\dfrac{\cos 8° + \sin 8°}{\cos 8° - \sin 8°} = \cot 53°$

(घ) $\dfrac{\cos 10° - \sin 10°}{\cos 10° + \sin 10°} = \tan 35°$

10. प्रमाणित गर्नुहोस् :

(क) $\dfrac{\tan 5A - \tan 4A}{1 + \tan 5A \tan 4A} = \tan A$

(ख) $\dfrac{\tan 7A - \tan 4A}{1 + \tan 7A \tan 4A} = \tan 3A$

(ग) $\dfrac{\tan(A+B) - \tan B}{1 + \tan(A+B)\tan B} = \tan A$

(घ) $\tan(A + B)\tan(A - B) = \dfrac{\tan^2 A - \tan^2 B}{1 - \tan^2 A \tan^2 B}$

(ङ) $\dfrac{\sin(A+B)}{\sin A \sin B} = \cot B + \cot A$

(च) $\dfrac{\cos(A + B)}{\sin A \sin B} = \cot A \cot B - 1$

11. प्रमाणित गर्नुहोस् :

(क) $\tan 25° + \tan 20° + \tan 25° . \tan 20° = 1$

(ख) $1 - \tan 27° - \tan 18° - \tan 27° . \tan 18°$

(ग) $\tan 65° - \tan 20° = 1 + \tan 25° . \tan 20°$

(घ) $1 + \cot 18° + \cot 27° = \cot 18° \cot 27°$

12. प्रमाणित गर्नुहोस् :

(क) $\tan 50° + \tan 60° + \tan 70° = \tan 50° . \tan 60° . \tan 70°$

(ख) $\tan 10A - \tan 6A - \tan 4A = \tan 10A . \tan 6A . \tan 4A$

(ग) $\tan 20°. \tan 30° + \tan 30°. \tan 40° + \tan 40°. \tan 20° = 1$

(घ) $\cot 5A. \cot 4A - \cot 9A. \cot 5A - \cot 9A. \cot 4A = 1$

13. प्रमाणित गर्नुहोस् :

(क) $\tan 50° - \tan 40° = 2 \tan 10°$

(ख) $\tan 50° = 2 \tan 30° + \tan 20°$

14. प्रमाणित गर्नुहोस् :

(क) $\dfrac{\sin(\beta+\gamma)}{\sin(\beta-\gamma)} = \dfrac{\tan\beta + \tan\gamma}{\tan\beta - \tan\gamma}$

(ख) $\dfrac{\sin(A+B).\sin(A-B).}{\cos^2 A.\cos^2 B} = \tan^2 A - \tan^2 B$

(ग) $\dfrac{\sin(A+B)+\sin(A-B)}{\cos(A+B)+\cos(A-B)} = \tan A$

15. प्रमाणित गर्नुहोस् :

(क) $\dfrac{\sin(A-B)}{\cos A. \cos B} + \dfrac{\sin(B-C)}{\cos B. \cos C} + \dfrac{\sin(C-A)}{\cos C. \cos A} = 0$

(ख) $\sin(A+B+C) = \cos A \cos B \cos C (\tan A + \tan B + \tan C - \tan A \tan B \tan C)$

(ग) $\cos(A+B+C) = \cos A \cos B \cos C (1 - \tan A. \tan B - \tan B. \tan C - \tan C. \tan A)$

(घ) $\tan(A+B+C) = \dfrac{\tan A + \tan B + \tan C - \tan A.\tan B. \tan C}{1 - \tan A.\tan B - \tan B.\tan C - \tan C.\tan A}$

उत्तर

1. (क) (b) (ख) (c) (ग) (b) (घ) (a) (ङ) d

3. (क) $\frac{56}{65}$ (ख) $\frac{33}{65}$ (ग) $\frac{16}{65}$ (घ) $\frac{63}{65}$ (ङ) $\frac{56}{33}$ (च) $\frac{63}{16}$

7.3 अपवर्त्य कोणहरू (Multiple Angles)

$\sin 15°$ को मान दिएको अवस्थामा $\sin 30°$ वा $\sin 45°$ को मान कसरी पत्ता लगाउन सकिन्छ ?

के $\sin 30° = \sin 2 \times 15°$ लेख्न मिल्छ, छलफल गर्नुहोस् ।

त्यस्तै गरी, $\sin 45° = \sin 3 \times 15°$ लेख्न मिल्छ ?

कुनै कोणलाई 2, 3, 4, ... ले गुणन गर्दा बन्ने कोणलाई त्यो कोणको अपवर्त्य कोण भनिन्छ,

जस्तै : A का अपवर्त्य कोणहरू 2A, 3A, 4A ... आदि हुन् ।

7.3.1 अपवर्त्य कोणहरूको त्रिकोणमितीय अनुपात (Trigonometric Ratio of Multiple Angles)

1. **कोण 2A को त्रिकोणमितीय अनुपात**

(क) $\sin 2A = \sin (A + A)$

$= \sin A \cos A + \cos A \sin A \quad [\because \sin (A + B) = \sin A. \cos B + \cos A. \sin B]$

$= 2 \sin A \cos A$

अत: $\sin 2A = 2 \sin A \cos A$

(ख) $\cos 2A = \cos (A + A)$

$= \cos A. \cos A - \sin A. \sin A \quad [\because \cos (A + B) = \cos A. \cos B \sin A. \sin B]$

अत: $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$

(ग) $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 1 - \sin^2 A - \sin^2 A = 1 - 2 \sin^2 A$

अत: $\cos 2A = 1 - 2 \sin^2 A$

(घ) $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = \cos^2 A - (1 - \cos^2 A)$

$= \cos^2 A - 1 + \cos^2 A = 2 \cos^2 A - 1$

अत: $\cos 2A = 2 \cos^2 A - 1$

(ङ) $\tan 2A = \tan (A + A) = \dfrac{\tan A + \tan A}{1 - \tan A \tan A} = \dfrac{2 \tan A}{1 - tan^2 A}$

अत: $\tan 2A = \dfrac{2 \tan A}{1 - tan^2 A}$

2. **sin 2A र cos 2A लाई tan A मा रूपान्तरण**

$\sin 2A = 2 \sin A . \cos A$

$= \dfrac{2 \sin A .\cos A}{1} = \dfrac{2 \sin A .\cos A}{cos^2 A + sin^2 A} \quad [\because cos^2 A + sin^2 A = 1]$

$= \dfrac{\frac{2 \sin A .\cos A}{cos^2 A}}{\frac{cos^2 A}{cos^2 A} + \frac{sin^2 A}{cos^2 A}} = \dfrac{2 \tan A}{1 + tan^2 A}$

अत: $\sin 2A = \dfrac{2 \tan A}{1 + tan^2 A}$

अर्को तरिका

$\sin 2A = 2\sin A\cos A$

$= 2\sin A\ \cos A \times \frac{\cos A}{\cos A} = 2\frac{\sin A}{\cos A} \times \cos^2 A$

$= 2\tan A \times \frac{1}{\sec^2 A} = \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$

अत: $\sin 2A = \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$

$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = \frac{\cos^2 A - \sin^2 A}{1}$

$= \frac{\cos^2 A - \sin^2 A}{\cos^2 A + \sin^2 A} = \frac{\frac{\cos^2 A}{\cos^2 A} - \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}}{\frac{\cos^2 A}{\cos^2 A} + \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}} = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$

अत: $\cos 2A = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$

3. **कोण 3A को त्रिकोणमितीय अनुपात**

$\sin 3A = \sin(A+2A)$

$= \sin A.\cos 2A + \cos A.\sin 2A$

$= \sin A(1-2\sin^2 A) + \cos A.\ 2\sin A.\cos A$

$= \sin A - 2\sin^3 A + 2\sin A.\cos^2 A$

$= \sin A - 2\sin^3 A + 2\sin A(1-\sin^2 A)$

$= \sin A - 2\sin^3 A + 2\sin A - 2\sin^3 A$

$= 3\sin A - 4\sin^3 A$

अत: $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$

$\cos 3A = \cos(A+2A)$

$= \cos A.\cos 2A - \sin A.\sin 2A$

$= \cos A(2\cos^2 A - 1) - \sin A.2\sin A.\cos A$

$= 2\cos^3 A - \cos A - 2\cos A.\sin^2 A$

$= 2\cos^3 A - \cos A - 2\cos A(1-\cos^2 A)$

$= 2\cos^3 A - \cos A - 2\cos A + 2\cos^3 A$

$= 4\cos^3 A - 3\cos A$

अत: $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$

अब, $\tan 3A = \tan(A+2A) = \frac{\tan A + \tan 2A}{1-\tan A\tan 2A} = \frac{\tan A + \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}}{1-\tan A\ .\ \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}}$

$$= \frac{\frac{\tan A\,(1-\tan^2 A)+2\tan A}{1-\tan^2 A}}{\frac{1-\tan^2 A-2\tan^2 A}{1-\tan^2 A}}$$

$$= \frac{\tan A-\tan^3 A+2\tan A}{1-\tan^2 A} \times \frac{1-\tan^2 A}{1-3\tan^2 A} = \frac{3\tan A-\tan^3 A}{1-3\tan^2 A}$$

अत: $\tan 3A = \dfrac{3\tan A-\tan^3 A}{1-3\tan^2 A}$

अपवर्तक कोणहरूका सर्वसमिकाहरू

1. $\sin 2A = 2\sin A \,.\, \cos A$
2. $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$
3. $\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A$
4. $\cos 2A = 2\cos^2 A - 1$
5. $\sin 2A = \dfrac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$
6. $\cos 2A = \dfrac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$
7. $\tan 2A = \dfrac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$
8. $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$
9. $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$
10. $\tan 3A = \dfrac{3\tan A-\tan^3 A}{1-3\tan^2 A}$

उदाहरण 1

यदि $\sin\theta = \frac{3}{5}$ भए $\sin 2\theta$, $\cos 2\theta$ र $\tan 2\theta$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ, $\sin\theta = \dfrac{3}{5}$

$$\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{25-9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta.\cos\theta = 2\times\frac{3}{5}\times\frac{4}{5} = \frac{24}{25}$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$$= \left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{16-9}{25} = \frac{7}{25}$$

$$\tan 2\theta = \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \frac{\frac{24}{25}}{\frac{7}{25}} = \frac{24}{25}\times\frac{25}{7} = \frac{24}{7}$$

अत: $\sin 2\theta = \dfrac{24}{25}$, $\cos 2\theta = \dfrac{7}{25}$ र $\tan 2\theta = \dfrac{24}{7}$

उदाहरण 2

यदि $\cos\theta = \frac{1}{2}$ भए $\sin 3\theta$ र $\cos 3\theta$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, $\cos\theta = \frac{1}{2}$

$$\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{4-1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

हामीलाई थाहा छ, $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

$$= 3.\frac{\sqrt{3}}{2} - 4.\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

$$= 4.\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3.\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = \frac{1-3}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

अतः $\sin 3\theta = 0$ र $\cos 3\theta = -1$

उदाहरण 3

प्रमाणित गर्नुहोस् : $\cot 3A = \frac{\cot^3 A - 3\cot A}{3\cot^2 A - 1}$

समाधान

यहाँ, $L.H.S = \cot 3A$

$$= \frac{1}{\tan 3A} = \frac{1}{\frac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}} = \frac{1 - 3\tan^2 A}{3\tan A - \tan^3 A}$$

$$= \frac{1 - 3.\frac{1}{\cot^2 A}}{3.\frac{1}{\cot A} - \frac{1}{\cot^3 A}} = \frac{\frac{\cot^2 A - 3}{\cot^2 A}}{\frac{3\cot^2 A - 1}{\cot^3 A}} = \frac{\cot^2 A - 3}{\cot^2 A} \times \frac{\cot^3 A}{3\cot^2 A - 1}$$

$$= \frac{\cot A(\cot^2 A - 3)}{3\cot^2 A - 1} = \frac{\cot^3 A - 3\cot A}{3\cot^2 A - 1} = R.H.S,$$ प्रमाणित भयो ।

उदाहरण 4

प्रमाणित गर्नुहोस् : $\tan A = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos 2A}{1 + \cos 2A}}$

समाधान हामीलाई थाहा छ,

$$\cos 2A = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$$

अथवा $\cos 2A\,(1+\tan^2 A) = 1-\tan^2 A$

अथवा $\cos 2A + \cos 2A \tan^2 A = 1-\tan^2 A$

अथवा $\tan^2 A + \cos 2A \tan^2 A = 1-\cos 2A$

अथवा $\tan^2 A\,(1+\cos 2A) = 1-\cos 2A$

अथवा $\tan^2 A = \frac{1-\cos 2A}{1+\cos 2A}$

अतः $\tan A = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2A}{1+\cos 2A}}$, प्रमाणित भयो ।

उदाहरण 5

प्रमाणित गर्नुहोस् : $\frac{1+\cos A+\cos 2A}{\sin A+\sin 2A} = \cot A$

समाधान यहाँ,

$$\text{L. H. S} = \frac{1+\cos A+\cos 2A}{\sin A+\sin 2A} = \frac{1+\cos A+2\cos^2 A-1}{\sin A+2\sin A.\cos A}$$

$$= \frac{\cos A+2\cos^2 A}{\sin A+2\sin A.\cos A} = \frac{\cos A\,(1+2\cos A)}{\sin A\,(1+2\cos A)} = \frac{\cos A}{\sin A}$$

$= \cot A = \text{R. H. S}$, प्रमाणित भयो ।

उदाहरण 6

प्रमाणित गर्नुहोस् : $\frac{1+\tan^2\left(\frac{\pi}{4}-A\right)}{1-\tan^2\left(\frac{\pi}{4}-A\right)} = \text{cosec } 2A$

समाधान यहाँ,

$$\text{L. H. S} = \frac{1+\tan^2\left(\frac{\pi}{4}-A\right)}{1-\tan^2\left(\frac{\pi}{4}-A\right)} = \frac{1}{\frac{1-\tan^2\left(\frac{\pi}{4}-A\right)}{1+\tan^2\left(\frac{\pi}{4}-A\right)}} = \frac{1}{\cos 2\left(\frac{\pi}{4}-A\right)}$$

$$= \frac{1}{\cos 2\left(45^\circ-A\right)} = \frac{1}{\cos\left(90^\circ-2A\right)} = \frac{1}{\sin 2A}$$

$= \text{cosec } 2A = \text{R. H. S}$, प्रमाणित भयो ।

उदाहरण 7

प्रमाणित गर्नुहोस् : $\cos^6\phi + \sin^6\phi = = \frac{1}{8}(5 + 3\cos 4\phi)$

समाधान यहाँ,

$$\begin{aligned}
\text{L. H. S} &= \cos^6\phi + \sin^6\phi \\
&= (\cos^2\phi)^3 + (\sin^2\phi)^3 \\
&= (\cos^2\phi + \sin^2\phi)\{(\cos^2\phi)^2 - \cos^2\phi.\sin^2\phi + (\sin^2\phi)^2\} \\
&= 1\ \{(\cos^2\phi)^2 + (\sin^2\phi)^2 - \cos^2\phi.\sin^2\phi\} \\
&= (\cos^2\phi + \sin^2\phi)^2 - 2\cos^2\phi.\sin^2\phi - \cos^2\phi.\sin^2\phi \\
&= (1)^2 - 3\cos^2\phi.\sin^2\phi \\
&= 1 - 3\cos^2\phi.\sin^2\phi \\
&= 1 - \frac{3}{4} \times 4\cos^2\phi.\sin^2\phi \\
&= 1 - \frac{3}{4}(2\sin\phi.\cos\phi)^2 \\
&= 1 - \frac{3}{4}(\sin 2\phi)^2 \\
&= 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2\phi \\
&= 1 - \frac{3}{4} \times \frac{1 - \cos 2.2\phi}{2} \quad [\because \cos 2A = 1 - 2\sin^2 A] \\
&= 1 - \frac{3(1 - \cos 4\phi)}{8} \\
&= \frac{8 - 3(1 - \cos 4\phi)}{8} \\
&= \frac{8 - 3 + 3\cos 4\phi)}{8} = \frac{5 + 3\cos 4\phi}{8} \\
&= \frac{1}{8}(5 + 3\cos 4\phi) = \text{R. H. S, प्रमाणित भयो ।}
\end{aligned}$$

अभ्यास 7.2

1. **दिइएका प्रश्नहरूको उपयुक्त विकल्पमा ठिक चिह्न (✓) लगाउनुहोस् :**

(क) तलका मध्ये $\cos 2A$ सँग बराबर हुने त्रिकोणमितीय अभिव्यञ्जक कुन हो ?

a. $\cos^2 A + \sin^2 A$ b. $\cos^2 A - \sin^2 A$

c. $1 - 2\cos^2 A$ d. $2\sin^2 A - 1$

(ख) तलका $\sin 3\theta$ सँग बराबर हुने त्रिकोणमितीय अभिव्यञ्जक कुन हो ?

a. $4\sin\theta - 3\sin^3\theta$ b. $4\sin^3\theta - 3\sin\theta$

c. $3\sin\theta - 4\sin^3\theta$ d. $3\sin\theta - 4\sin^4\theta$

(ग) यदि $A = 30°$ भए $\sin 2A$ को मान कति हुन्छ ?

a. 0 b. 1 c. $\frac{1}{2}$ d. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(घ) यदि $\cos 3A = -1$ हुन A को मान कति हुनुपर्छ ?

a. 0° b. 30° c. 15° d. 60°

(ङ) तलका मध्ये $\tan 2A$ सँग बराबर हुने हुने त्रिकोणमितीय अभिव्यञ्जक कुन हो ?

a. $\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$ b. $\frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$ c. $\frac{1+\tan^2 A}{1-\tan^2 A}$ d. $\frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$

2. (क) यदि $\sin A = \frac{4}{5}$ भए, $\sin 2A$, $\cos 2A$ र $\tan 2A$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) यदि $\cos A = \frac{12}{13}$ भए $\sin 2A$, $\cos 2A$ र $\tan 2A$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) यदि $\cos\theta = \frac{4}{5}$ भए $\sin 3\theta$, $\cos 3\theta$ र $\tan 3\theta$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(घ) यदि $\tan y = \frac{1}{2}$ भए , $\tan 3y$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

3. (क) यदि $\cos 2A = = \frac{7}{25}$ भए, $\sin A$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) यदि $\cos 2A = \frac{13}{36}$ भए, $\cos A$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) यदि $\tan 2A = \frac{120}{119}$ भए, $\tan A$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

4. **प्रमाणित गर्नुहोस् :**

(क) $\frac{1+\cos 2A}{\sin 2A} = \cot A$ (ख) $\frac{1-\cos 2A}{\sin 2A} = \tan A$ (ग) $\frac{1-\cos 2A}{1+\cos 2A} = \tan^2 A$

(घ) $\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta} = \frac{1-\sin 2\theta}{\cos 2\theta}$ (ङ) $\frac{\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha} = \frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}$

(च) $\frac{1+\sin 2\theta-\cos 2\theta}{1+\sin 2\theta+\cos 2\theta} = \tan\theta$ (छ) $\frac{\sin\theta+\sin 2\theta}{1+\cos\theta+\cos 2\theta} = \tan\theta$

(ज) $\tan A + \cot A = 2\,\text{cosec}\, 2A$ (झ) $\cot A - \tan A = 2\cot 2A$

5. **प्रमाणित गर्नुहोस् :**

(क) $\tan(45^0 + A) = \frac{\cos 2A}{1-\sin 2A}$ (ख) $\frac{1-\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}$

(ग) $2\sin^2(45° - A) = 1 - \sin 2A$ (घ) $\tan(45° + A) = \sec 2\theta + \tan 2\theta$

(ङ) $2\cos^2(45° - A) = 1 + \sin 2A$ (च) $\cos^2(45° - \theta) - \sin^2(45° - \theta) = \sin 2\theta$

(छ) $\frac{\sin 5A}{\sin A} - \frac{\cos 5A \cos 5A}{\cos A \quad \cos A} = 4\cos 2A$ (ज) $\frac{1 - \tan^2(45° - A)}{1 + \tan^2(45° - A)} = \sin 2A$

6\. (क) यदि $\cos\theta = \frac{1}{2}(a + \frac{1}{a})$ भए, प्रमाणित गर्नुहोस् : $\cos 2\theta = \frac{1}{2}(a^2 + \frac{1}{a^2})$

(ख) यदि $\sin A = \frac{1}{2}(a + \frac{1}{a})$ भए, प्रमाणित गर्नुहोस् : $\cos 2A = -\frac{1}{2}(a^2 + \frac{1}{a^2})$

(ग) यदि $\sin\beta = \frac{1}{2}(a + \frac{1}{a})$ भए, प्रमाणित गर्नुहोस्: $\sin 3\beta = -\frac{1}{2}(a^3 + \frac{1}{a^3})$

(घ) यदि $\cos\beta = \frac{1}{2}(a + \frac{1}{a})$ भए, प्रमाणित गर्नुहोस्: $\cos 3\beta = \frac{1}{2}(a^3 + \frac{1}{a^3})$

7\. **प्रमाणित गर्नुहोस् :**

(क) $(\sin 2A + \sin 2B)^2 + (\cos 2A - \cos 2B)^2 = 4\sin^2(A+B)$

(ख) $(\sin 2A - \sin 2B)^2 + (\cos 2A + \cos 2B)^2 = 4\cos^2(A+B)$

(ग) $(1 + \sin 2A + \cos 2A)^2 = 4\cos^2 A(1 + \sin 2A)$

8\. **प्रमाणित गर्नुहोस् :**

(क) $\sin^2 A - \cos^2 A.\cos 2B = \sin^2 B - \cos^2 B.\cos 2A$

(ख) $\cos^2 \propto + \sin^2 \propto \cos 2\beta = \cos^2\beta + \sin^2\beta\cos 2 \propto$

9\. **प्रमाणित गर्नुहोस् :**

(क) $(2\cos\theta + 1)(2\cos\theta - 1) = 2\cos 2\theta + 1$

(ख) $(2\cos\theta + 1)(2\cos\theta - 1)(2\cos\theta - 1) = 2\cos 4\theta + 1$

10\. **प्रमाणित गर्नुहोस् :**

(क) $\frac{\cos^3 A + \sin^3 A}{\cos A + \sin A} = 1 - \frac{1}{2}\sin 2A$ (ख) $\cos 6\theta - \sin 6\theta = \cos 2\theta(1 - \sin^2 2\theta)$

(ग) $4(\sin 6\theta + \cos 6\theta) = 4 - 3\sin^2 2\theta$ (घ) $\cos^6\theta - \sin^6\theta = \frac{1}{4}(\cos^3 2\theta + 3\cos 2\theta)$

(ङ) $\cos^6\theta + \sin^6\theta = \frac{1}{8}(5 + 3\cos 4\theta)$

(च) $\sin^8\theta + \cos^8\theta = \frac{1}{8}(8 - 8\sin^2 2\theta + \sin^4 2\theta)$

11\. **प्रमाणित गर्नुहोस् :**

(क) $\text{cosec } 10° - \sqrt{3}\sec 10° = 4$ ख) $\sqrt{3}\text{ cosec } 20° - \sec 20° = 4$

(ग) $\sec 40° + \sqrt{3}\text{ cosec } 40° = 4$

12. प्रमाणित गर्नुहोस् :

(क) $\operatorname{cosec} 2A + \cot 4A = \cot A - \operatorname{cosec} 4A$

(ख) $\cot 8A + \operatorname{cosec} 4A = \cot 2A - \operatorname{cosec} 8A$

(ग) $\frac{sec4A-1}{sec2A-1} = \tan 4A \cot A$ (घ) $\frac{sec8A - 1}{sec4A-1} = \tan 8A \cot 2A$

13. प्रमाणित गर्नुहोस् :

(क) $\frac{1}{\tan3\theta+\tan\theta} - \frac{1}{\cot3\theta+\cot\theta} = \cot 4\theta$

(ख) $\frac{\cot\theta}{\cot\theta-\cot3\theta} - \frac{\tan\theta}{\tan3\theta-\tan\theta} = 1$

14. प्रमाणित गर्नुहोस् :

(क) $4(\cos^3 10° + \sin^3 20°) = 3(\cos 10° + \sin 20°)$

(ख) $4(\cos^3 20° + \sin^3 50°) = 3(\cos 20° + \sin 50°)$

(ग) $\cos^3 A.\cos 3A + \sin^3 A.\sin 3A = \cos^3 2A$

15. प्रमाणित गर्नुहोस् :

(क) $\tan\theta + \tan(60° + \theta) - \tan(60° - \theta) = 3\tan 3\theta$

(ख) $\cot\theta + \cot(60° + \theta) - \cot(60° - \theta) = 3\cot 3\theta$

(ग) $\tan\theta + 2\tan 2\theta + 4\tan 4\theta + 8\cot 8\theta = \cot\theta$

16. (क) $\cos 4\theta$ लाई $\sin\theta$ का रूपमा व्यक्त गर्नुहोस् ।

(ख) $\cos 5\theta$ लाई $\cos\theta$ का रूपमा व्यक्त गर्नुहोस् ।

17. प्रमाणित गर्नुहोस् :

(क) $\frac{cosA}{cosA-sinA} - \frac{cosA}{cosA+sinA} = \tan 2A$ (ख) $\tan 2\theta + \sec 2\theta = \frac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta - \sin\theta}$

(ग) $\frac{\cot 2\theta + \tan 2\theta}{\cot 2\theta - \tan 2\theta} = \sec 4\theta$ (घ) $\frac{cos2A}{1+ sin2A} = \tan(45^{\circ} - A) = \frac{1-tanA}{1+tanA}$

18. **यदि $2\tan\alpha = 3\tan\beta$ भए प्रमाणित गर्नुहोस् :**

(क) $\tan(\alpha + \beta) = \frac{5\, sin2\beta}{5\, cos2\beta-1}$ (ख) $\tan(\alpha - \beta) = \frac{sin2\beta}{5 - cos2\beta}$

19. **यदि** $\tan A = \frac{b}{a}$ **भए प्रमाणित गर्नुहोस् :** $a\cos 2A + b\sin 2A = a$

20. **प्रमाणित गर्नुहोस् :** $\dfrac{sinA-\sqrt{1-sin2A}}{cosA-\sqrt{1-sin2A}}$ = cot A

21. **प्रमाणित गर्नुहोस् :** $\sin^4 A = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2A + \frac{1}{8}\cos 4A$

22. **प्रमाणित गर्नुहोस् :** $\sin^4\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin^4\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \sin^4\left(\frac{5\pi}{8}\right) + \sin^4\left(\frac{7\pi}{8}\right) = \frac{3}{2}$

उत्तर

1. (क) b (ख) c (ग) d (घ) d (ङ) a

2. (क) $\frac{24}{25}, \frac{-7}{25}, \frac{-24}{7}$ (ख) $\frac{120}{169}, \frac{119}{169}, \frac{120}{119}$ (ग) $\frac{117}{125}, \frac{-44}{125}, \frac{-117}{44}$ (घ) $\frac{11}{2}$

3. (क) $\frac{3}{5}$ (ख) $\frac{7}{6\sqrt{2}}$ (ग) $\frac{5}{12}$ or $\frac{-12}{5}$

7.4 अपवर्तक कोणहरू (Submultiple Angles)

sin 60° को मान दिइएको अवस्थामा sin30° को मान कसरी पत्ता लगाउने होला ?
के $\sin 15° = \sin\dfrac{30°}{2}$ लेख्न मिल्छ, छलफल गर्नुहोस् ।

त्यस्तै गरी, $\sin\left(22\frac{1}{2}\right)° = \sin\left(\frac{45}{2}\right)°$ लेख्न मिल्छ ?

कुनै कोणलाई 2, 3, 4, … बराबर भागमा बाँड्दा बन्ने कोणलाई त्यो कोणका अपवर्तक कोणहरू भनिन्छ ।

जस्तै : A का अपवर्तक कोणहरू $\dfrac{A}{2}, \dfrac{A}{3}, \dfrac{A}{4}$… आदि हुन्छन् ।

7.4.1 अपवर्तक कोणहरूको त्रिकोणमितीय अनुपात (Trigonometric Ratio of Submultiple Angles)

(क) कोण $\dfrac{A}{2}$ का रूपमा त्रिकोणमितीय अनुपात

sin (A + B) = sin A. cos B + cos A.sin B

$$\sin A = \sin\left(\frac{A}{2} + \frac{A}{2}\right)$$

$$= \sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{A}{2}\sin\frac{A}{2} = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$$

अतः $\sin A = 2\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{A}{2}$

अर्को तरिका,

हामीलाई थाहा छ कि, sin 2A = 2 sin A cos A

(क) $\sin A = \sin 2\frac{A}{2} = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$

अत: $\sin A = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$

(ख) हामीलाई थाहा छ कि,

$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$

$\cos A = \cos 2\frac{A}{2} = \cos^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{A}{2}$

अत: $\cos A = \cos^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{A}{2}$

त्यस्तै गरी,

(ग) $\cos A = 1 - 2\sin^2\frac{A}{2}$

(घ) $\cos A = 2\cos^2\frac{A}{2} - 1$

(ङ) $\tan A = \dfrac{2\tan\frac{A}{2}}{1-\tan^2\frac{A}{2}}$

(च) $\sin A = \dfrac{2\tan\frac{A}{2}}{1+\tan^2\frac{A}{2}}$

(छ) $\cos A = \dfrac{1-\tan^2\frac{A}{2}}{1+\tan^2\frac{A}{2}}$

7.4.2 sin A, cos A र tan A को कोण $\frac{A}{3}$ का रूपमा त्रिकोणमितीय अनुपातहरू

$\frac{A}{3}$ कोण का रूपमा त्रिकोणमतीय अनुपात

$\sin A = \sin\left(3\times\frac{A}{3}\right) = 3\sin\frac{A}{3} - 4\sin^3\frac{A}{3}$ $[\because \sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A]$

अत: $\sin A = 3\sin\frac{A}{3} - 4\sin^3\frac{A}{3}$

त्यस्तै गरी, प्रमाणित गर्नुहोस् :

(क) $\cos A = 4\cos^3\frac{A}{3} - 3\cos\frac{A}{3}$

(ख) $\tan A = \dfrac{3\tan\frac{A}{3} - \tan^3\frac{A}{3}}{1-3\tan^2\frac{A}{3}}$

अपवर्त्य कोणका सर्वसमिकाहरू	अपवर्तक कोणका सर्वसमिकाहरू
1. $\sin 2A = 2\sin A\cos A$	1. $\sin A = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$
2. $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$	2. $\cos A = \cos^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{A}{2}$
3. $\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A$	3. $\cos A = 1 - 2\sin^2\frac{A}{2}$

4. $\cos 2A = 2\cos^2 A - 1$	4. $\cos A = 2\cos^2 \frac{A}{2} - 1$
5. $\sin 2A = \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$	5. $\sin A = \frac{2\tan \frac{A}{2}}{1+\tan^2 \frac{A}{2}}$
6. $\cos 2A = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$	6. $\cos A = \frac{1-\tan^2 \frac{A}{2}}{1+\tan^2 \frac{A}{2}}$
7. $\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$	7. $\tan A = \frac{2\tan \frac{A}{2}}{1-\tan^2 \frac{A}{2}}$
8. $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$	8. $\sin 3A = 3\sin \frac{A}{3} - 4\sin^3 \frac{A}{3}$
9. $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$	9. $\cos A = 4\cos^3 \frac{A}{3} - 3\cos \frac{A}{3}$
10. $\tan 3A = \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1-3\tan^2 A}$	10. $\tan A = \frac{3\tan \frac{A}{3} - \tan^3 \frac{A}{3}}{1-3\tan^2 \frac{A}{3}}$

उदाहरण 1

यदि $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{4}{5}$ भए $\sin\theta$, $\cos\theta$ र $\tan\theta$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ

$$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{4}{5}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{1-\sin^2\frac{\theta}{2}} = \sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{25-16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

$$\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = 2\times\frac{4}{5}\times\frac{3}{5} = \frac{24}{25}$$

$$\cos\theta = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 - \left(\frac{4}{5}\right) = \frac{9}{25} - \frac{16}{25} = \frac{9-16}{25} = \frac{-7}{25}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{24}{25}}{\frac{-7}{25}} = -\frac{24}{7}$$

अत: $\sin\theta = \frac{24}{25}$, $\cos\theta = -\frac{7}{25}$ र $\tan\theta = -\frac{24}{7}$

उदाहरण 2

यदि $\sin\frac{A}{3} = \frac{1}{2}$ भए $\cos A$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ, $\sin\frac{A}{3} = \frac{1}{2}$

हामीलाई थाहा छ,

$$\cos\frac{A}{3} = \sqrt{1-\sin^2\frac{A}{3}} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{4-1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

फेरि,

$$\cos A = 4\cos^3\frac{A}{3} - 3\cos\frac{A}{3} = 4\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 - 3\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 4\times\frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = 0$$

अतः $\cos A = 0$

उदाहरण 3

यदि $\sin 30° = \frac{1}{2}$ भए, प्रमाणित गर्नुहोस् : $\sin 15° = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

समाधान : यहाँ,

$\sin 30° = \frac{1}{2}$

$\cos 30° \quad = \sqrt{1-\sin^2 30°}$

$$\cos 30° = \sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{4-1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

अतः $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

अथवा, $\cos 2 \times 15° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

अथवा, $1 - 2\sin^2 15° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

अथवा, $1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sin^2 15°$

अथवा, $\frac{2 - \sqrt{3}}{2} = 2 \sin^2 15°$

अथवा, $\frac{2 - \sqrt{3}}{2 \times 2} = \sin^2 15°$

अथवा, $\frac{2 - \sqrt{3}}{2 \times 2} \times \frac{2}{2} = \sin^2 15°$

अथवा, $\frac{4 - 2\sqrt{3}}{8} = \sin^2 15°$

अथवा, $\frac{3 + 1 - 2\sqrt{3}}{8} = \sin^2 15°$

अथवा, $\frac{\sqrt{3}^2 - 2 \times \sqrt{3} \times 1 + 1^2}{8} = \sin^2 15°$

अथवा, $\frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{(2\sqrt{2})^2} = \sin^2 15°$

अथवा, $\sin 15° = \pm \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$

अतः $\sin 15° = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$, प्रमाणित भयो । ($\sin 15°$ को मान सधैँ धनात्मक हुने भएकाले ।)

उदाहरण 4

प्रमाणित गर्नुहोस् : $\frac{1 + \cos\theta}{\sin\theta} = \cot\frac{\theta}{2}$

समाधान : यहाँ,

$$\text{LHS} = \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{1+2\cos^2\frac{\theta}{2}-1}{2\sin\frac{\theta}{2}.\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{2\cos^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

$= \cot\frac{\theta}{2} =$ R.H.S, प्रमाणित भयो ।

उदाहरण 5

प्रमाणित गर्नुहोस् : $\frac{1+\sin\theta-\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta} = \tan\frac{\theta}{2}$

समाधान : यहाँ,

$$\text{LHS} = \frac{1+\sin\theta-\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}$$

$$= \frac{1+2\sin\frac{\theta}{2}.\cos\frac{\theta}{2}-(1-2\sin^2\frac{\theta}{2})}{1+\sin\frac{\theta}{2}.\cos\frac{\theta}{2}+2\cos^2\frac{\theta}{2}-1}$$

$$= \frac{1+2\sin\frac{\theta}{2}.\cos\frac{\theta}{2}-1+2\sin^2\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}.\cos\frac{\theta}{2}+2\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\right)}{2\cos\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}$$

$= \tan\frac{\theta}{2} =$ RHS, प्रमाणित भयो ।

उदाहरण 6

प्रमाणित गर्नुहोस् : $\sec A - \tan A = \tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{A}{2}\right)$

समाधान : यहाँ,

$$\text{RHS} = \tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{A}{2}\right)$$

$$= \frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\frac{A}{2}}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{A}{2}} = \frac{1-\tan\frac{A}{2}}{1+1.\tan\frac{A}{2}}$$

$$= \frac{1 - \frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}}{1 + \frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}} = \frac{\frac{\cos\frac{A}{2} - \sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}}{\frac{\cos\frac{A}{2} + \sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}} = \frac{\cos\frac{A}{2} - \sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2} + \sin\frac{A}{2}}$$

हर र अंशलाई $\cos\frac{A}{2} - \sin\frac{A}{2}$ ले गुणन गर्दा,

$$= \frac{\cos\frac{A}{2} - \sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2} + \sin\frac{A}{2}} \times \frac{\cos\frac{A}{2} - \sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2} - \sin\frac{A}{2}}$$

$$= \frac{\left(\cos\frac{A}{2} - \sin\frac{A}{2}\right)^2}{\cos^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{A}{2}}$$

$$= \frac{\cos^2\frac{A}{2} - 2\cos\frac{A}{2}.\sin\frac{A}{2} + \sin^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{A}{2}}$$

$$= \frac{\cos^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{A}{2} - 2\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{A}{2}} = \frac{1 - sinA}{cosA}$$

$$= \frac{1}{cosA} - \frac{sinA}{cosA}$$

$= \sec A - \tan A = \text{LHS}$, प्रमाणित भयो ।

अभ्यास 7.3

1. **दिइएका प्रश्नहरूको उपयुक्त विकल्पमा ठिक चिह्न (✓) लगाउनुहोस् :**

(क) तलका मध्ये sin A कुनसँग बराबर हुन्छ ?

a. $\cos^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{A}{2}$ b. $\cos^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{A}{2}$

c. $1 - 2\cos^2\frac{A}{2}$ d. $2\sin\frac{A}{2}\ .\ \cos\frac{A}{2}$

(ख) तलका मध्ये कुन चाहिँ $\cos\theta$ सँग बराबर हुन्छ ?

a. $4\sin\frac{\theta}{3} - 3\sin^3\frac{\theta}{3}$ b. $4\cos^3\frac{\theta}{3} - 3\cos\frac{\theta}{3}$

c. $3\cos\frac{\theta}{3} - 4\cos^3\frac{\theta}{3}$ d. $3\sin\frac{\theta}{3} - 4\sin^4\frac{\theta}{3}$

(ग) यदि $A = 60°$ भए $\sin\frac{A}{2}$ को मान कति हुन्छ ?

a. 0 b. 1 c. $\frac{1}{2}$ d. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(घ) 60° को अपवर्तक कोण कुन हो ?

a. 15° b. 25° c. 35° d. 45°

(ङ) tan A सँग बराबर कुन हुन्छ ?

a. $\frac{2\tan\frac{A}{2}}{1+tan^2\frac{A}{2}}$ b. $\frac{1-tan^2\frac{A}{2}}{1+tan^2\frac{A}{2}}$

c. $\frac{2\tan\frac{A}{2}}{1-tan^2\frac{A}{2}}$ d. $\frac{1+tan^2\frac{A}{2}}{1-tan^2\frac{A}{2}}$

2. (क) अपवर्तक कोणलाई उदाहरणसहित परिभाषित गर्नुहोस् ।

(ख) $\sin\theta$ लाई $\tan\frac{\theta}{2}$ मा व्यक्त गर्नुहोस् । (ग) $\cos\theta$ लाई $\cos\frac{\theta}{2}$ मा व्यक्त गर्नुहोस् ।

(घ) $\cos\theta$ लाई $\tan\frac{\theta}{2}$ मा व्यक्त गर्नुहोस् । (ङ) $\sin\theta$ लाई $\sin\frac{\theta}{3}$ मा व्यक्त गर्नुहोस् ।

3. (क) यदि $\sin\frac{A}{2} = \frac{4}{5}$ भए, sin A, cos A र tan A को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) यदि $\tan\frac{A}{2} = \frac{3}{4}$ भए, sin A, cos A र tan A को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) यदि $\cos\frac{A}{2} = \frac{5}{13}$ भए, sin A , cos A र tan A को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(घ) यदि $\sin\frac{\theta}{3} = \frac{1}{2}$ भए, $\sin\theta$, $\cos\theta$ र $\tan\theta$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ङ) यदि $\cos\frac{\theta}{3} = \frac{4}{5}$ भए, $\sin\theta$, $\cos\theta$ र $\tan\theta$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(च) यदि $\tan\frac{\theta}{3} = \frac{1}{2}$ भए, $\tan\theta$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

4. (क) यदि $\cos A = \frac{7}{25}$ भए, $\sin\frac{A}{2}$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) यदि $\cos A = \frac{13}{36}$ भए, $\cos \frac{A}{2}$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) यदि $\tan A = \frac{4}{3}$ भए, $\tan \frac{A}{2}$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

5. (क) यदि $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ भए, प्रमाणित गर्नुहोस् :

(अ) $\sin 15° = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

(आ) $\cos 15° = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

(इ) $\tan 15° = 2 - \sqrt{3}$

(ई) $\cot 15° = 2 + \sqrt{3}$

(ख) यदि $\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$ भए, प्रमाणित गर्नुहोस् :

(अ) $\cos\left(22\frac{1}{2}\right)^{\circ} = \frac{1}{2}\sqrt{(2+\sqrt{2})}$

(आ) $\sin\left(22\frac{1}{2}\right)^{\circ} = \frac{1}{2}\sqrt{(2-\sqrt{2})}$

(इ) $\tan\left(22\frac{1}{2}\right)^{\circ} = \frac{1}{2}\sqrt{(3-2\sqrt{2})}$

(ई) $\cot 15° = \sqrt{2} + 1$

6. प्रमाणित गर्नुहोस् :

(क) यदि $\cos\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)$ भए, प्रमाणित गर्नुहोस् : $\cos\theta = \frac{1}{2}\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)$

(ख) यदि $\sin\frac{A}{2} = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)$ भए, प्रमाणित गर्नुहोस् : $\cos A = -\frac{1}{2}\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)$

(ग) यदि $\sin\frac{\beta}{3} = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)$ भए, प्रमाणित गर्नुहोस्: $\sin\beta = -\frac{1}{2}\left(a^3 + \frac{1}{a^3}\right)$

(घ) यदि $\cos\frac{\beta}{3} = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)$ भए, प्रमाणित गर्नुहोस् : $\cos\beta = \frac{1}{2}\left(a^3 + \frac{1}{a^3}\right)$

7. प्रमाणित गर्नुहोस् :

(क) $\frac{1+\cos A}{\sin A} = \cot\frac{A}{2}$

(ख) $\frac{\sin A}{1+\cos A} = \tan\frac{A}{2}$

(ग) $\frac{1-\cos A}{\sin A} = \tan\frac{A}{2}$

(घ) $\frac{\sin A}{1-\cos A} = \cot\frac{A}{2}$

(ङ) $\frac{1+\sin A}{\cos A} = \frac{\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}-\sin\frac{A}{2}}$

(च) $\cos A = \frac{1-\tan^2\frac{A}{2}}{1-\tan^2\frac{A}{2}}$

(छ) $\frac{1-\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan\frac{\theta}{2}} = \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$

(ज) $\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha} = \frac{1-\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan\frac{\alpha}{2}}$

(झ) $\frac{1+\sin\theta-\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta} = \tan\frac{\theta}{2}$ (ञ) $\frac{\sin\theta-\cos\frac{\theta}{2}}{1-\sin\frac{\theta}{2}-\cos\theta} = \cot\theta$

(ट) $\sin A + \tan A = \frac{4\tan\frac{A}{2}}{1-\tan^4\frac{A}{2}}$ (ठ) $\tan\frac{A}{2} + \cot\frac{A}{2} = 2\,\text{cosec}\,A$

8. प्रमाणित गर्नुहोस् :

(क) $\tan(45° + \frac{A}{2}) = \frac{\cos A}{1-\sin A}$ (ख) $2\sin^2(45° - \frac{A}{2}) = 1-\sin A$

(ग) $2\cos^2(45° - \frac{A}{2}) = 1+\sin A$

(घ) $\cos^2(45° - \frac{\theta}{2}) - \sin^2(45^0 - \frac{\theta}{2}) = \sin\theta$

(ङ) $\frac{1-\tan^2(45°-A)}{1+\tan^2(45°-A)} = \sin A$ (च) $\frac{1-\tan^2(45°-A)}{1+\tan^2(45°-A)} = \sin A$

(छ) $\tan(45° + \frac{A}{2}) = \sec A + \tan A = \sqrt{\frac{1+\sin A}{1-\sin A}}$

(ज) $\frac{\sin 2A}{1+\cos 2A} \times \frac{\cos A}{1+\cos A} = \tan\frac{A}{2}$

9. **प्रमाणित गर्नुहोस् :** $\left(1+\cos\frac{\pi}{8}\right)\left(1+\cos\frac{3\pi}{8}\right)\left(1+\cos\frac{5\pi}{8}\right)\left(1+\cos\frac{7\pi}{8}\right) = \frac{1}{8}$

उत्तर

1. (क) d (ख) b (ग) c (घ) a (ङ) c

2. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् । 3. (क) $\frac{24}{25}, \frac{-7}{25}, \frac{-24}{7}$ (ख) $\frac{24}{25}, \frac{7}{25}, \frac{24}{7}$ (ग) $\frac{120}{169}, \frac{-119}{169}, \frac{-120}{119}$

(घ) 1, 0, ∞ (ङ) $\frac{117}{125}, \frac{-44}{125}, \frac{-117}{44}$ (च) $\frac{11}{2}$ 4. (क) $\frac{3}{5}$ (ख) $\frac{7\sqrt{2}}{12}$ (ग) $\frac{1}{2}$ or -2

7.5 त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाको रूपान्तरण (Transformation of Trigonometric Identities)

7.5.1. गुणनफललाई योग र अन्तरमा रूपान्तरण (Transformation of Sum or Difference into Product)

त्रिकोणमितिमा दिइएका कोणहरूको गुणनफलका रूपमा रहेको अभिव्यञ्जकलाई योग वा अन्तरको रूपमा रूपान्तरण गर्न सकिन्छ । गुणनफललाई योग वा अन्तरमा बदल्ने वा रूपान्तरण गर्ने कसरी होला, छलफल गर्नुहोस् ।

मिश्रित कोणका सर्वसमिका

$\sin A \cos B + \cos A \sin B = \sin (A + B)$ ....(i)

$\sin A \cos B - \cos A \sin B = \sin (A - B)$ ....(ii)

समीकरण (i) र (ii) लाई जोड्दा,

$\sin A \cos B + \cos A \sin B + \sin A \cos B - \cos A \sin B = \sin (A + B) + \sin (A - B)$

अतः $2 \sin A \cos B = \sin (A + B) + \sin (A - B)$.....(iii)

समीकरण (i) बाट (ii) घटाउँदा,

$\sin (A + B) - \sin (A - B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B - \sin A \cos B + \cos A \sin B$

अतः $\sin (A + B) - \sin (A - B) = 2 \cos A \sin B$.....(iv)

त्यस्तै गरी,

$\cos (A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$ ....(v)

$\cos (A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$...........(vi)

समीकरण (v) र (vi) लाई जोड्दा,

$\cos (A + B) + \cos (A - B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B + \cos A \cos B + \sin A \sin B$

अतः $\cos (A + B) + \cos (A - B) = 2 \cos A \cos B$.......(vii)

समीकरण (v) बाट (vi) घटाउँदा,

$\cos (A + B) - \cos (A - B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B - \cos A \cos B - \sin A \sin B$

अतः $\cos (A + B) - \cos (A - B) = -2 \sin A \sin B$ ....(viii)

अथवा, $\cos (A - B) - \cos (A + B) = 2 \sin A \sin B$

अत: $2 \sin A \cos B = \sin (A+B) + \sin (A-B)$

$2 \cos A \sin B = \sin (A+B) - \sin (A-B)$

$2 \cos A \cos B = \cos (A+B) + \cos (A-B)$

$-2 \sin A \sin B = \cos (A+B) - \cos (A-B)$

$2 \sin A \sin B = \cos (A-B) - \cos (A+B)$

7.5.2. योग र अन्तरलाई गुणनफलमा रूपान्तरण (Transformation of Sum or Difference into Product)

माथिका सम्बन्धहरू (iii), (iv), (vii) and (viii),

$\sin (A+B) + \sin (A-B) = 2 \sin A \cos B$............(i)

$\sin (A+B) - \sin (A-B) = 2 \cos A \sin B$.............(ii)

$\cos (A+B) + \cos (A-B) = 2 \cos A \cos B$.........(iii)

$\cos (A+B) - \cos (A-B) = -2 \sin A \sin B$.........(iv)

दुईओटा कोणको योग वा अन्तरले अर्को नयाँ कोण बन्ने हुँदा माथिका सर्वसमिकाबाट,

$A + B = C$ ....(v)

$A - B = D$..............(vi)

सम्बन्धहरू (v) र (vi) जोड्दा,

$2A = C + D$

$A = \frac{C+D}{2}$

सम्बन्धहरू (v) बाट (vi) घटाउँदा,

$2B = C - D$

$B = \frac{C-D}{2}$

A, B, A + B र A – B का मान सम्बन्धहरू (i), (ii), (iii) र (iv) मा प्रतिस्थापन गर्दा,

$\sin C + \sin D = 2 \sin \frac{C+D}{2} \cos \frac{C-D}{2}$

$\sin C - \sin D = 2 \cos \frac{C+D}{2} \sin \frac{C-D}{2}$

$\cos C + \cos D = 2 \cos \frac{C+D}{2} \cos \frac{C-D}{2}$

$\cos C - \cos D = 2 \sin \frac{C+D}{2} \sin \frac{D-C}{2}$

उदाहरण 1

तलका गुणनफललाई योग र अन्तरमा रूपान्तरण गर्नुहोस् :

(क) $\sin 35° \cos 25°$ (ख) $\cos 25° \cos 10°$ (ग) $\sin 10A \sin 6A$

समाधान : यहाँ,

(क) $\sin 35° \cos 25° = \frac{1}{2}(2\sin 35° \cos 25°)$

$= \frac{1}{2}[\sin(35° + 25°) + \sin(35° - 25°)] = \frac{1}{2}[\sin 60° + \sin 10°]$

(ख) $\cos 25° \cos 10° = \frac{1}{2}(2\cos 25° \cos 10°)$

$= \frac{1}{2}[\cos(25° + 10°) + \cos(25° - 10°)] = \frac{1}{2}[\cos 35° + \cos 15°]$

(ग) $\sin 10A \sin 6A = \frac{1}{2}(2\sin 10A \sin 6A)$

$= \frac{1}{2}[\cos(10A - 6A) - \cos(10A + 6A)] = \frac{1}{2}[\cos 4A - \cos 16A]$

उदाहरण 2

तलका योग र अन्तरलाई गुणनफलमा रूपान्तरण गर्नुहोस् :

(क) $\sin 55° - \sin 25°$ (ख) $\cos 25° + \cos 15°$ (ग) $\sin 8A - \sin 6A$

समाधान : यहाँ,

(क) $\sin 55° - \sin 25° = 2\cos\frac{55° + 25°}{2} \cdot \sin\frac{55° - 25°}{2} = 2\cos 40° \cdot \sin 15°$

(ख) $\cos 25° + \cos 15° = 2\cos\frac{25° + 15°}{2} \cdot \cos\frac{25° - 15°}{2} = 2\cos 20° \cos 5°$

(ग) $\sin 8A - \sin 6A = 2\cos\frac{8A + 6A}{2} \sin\frac{8A - 6A}{2} = 2\cos 7A \sin A$

उदाहरण 3

प्रमाणित गर्नुहोस् : $\frac{\cos 10° + \sin 10°}{\cos 10° - \sin 10°} = \cot 35°$

समाधान : यहाँ,

$$\text{L.H.S.} = \frac{\cos 10° + \sin 10°}{\cos 10° - \sin 10°} = \frac{\cos(90° - 80°) + \sin 10°}{\cos(90° - 80°) - \sin 10°}$$

$$= \frac{\sin 80° + \sin 10°}{\sin 80° - \sin 10°} = \frac{2\sin\frac{80° + 10°}{2} \cdot \cos\frac{80° - 10°}{2}}{2\cos\frac{80° + 10°}{2} \cdot \sin\frac{80° - 10°}{2}}$$

$$= \frac{2\sin 45° \cdot \cos 35°}{2\cos 45° \cdot \sin 35°} = \frac{2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 35°}{2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 35°} = \frac{\cos 35°}{\sin 35°}$$

$= \cot 35°$ $=$ R.H.S., प्रमाणित भयो ।

उदाहरण 4

प्रमाणित गर्नुहोस् : $2\cos(45° + A)\sin(45° - A) = (\sin A - \cos A)^2$

समाधान : यहाँ,

$$\begin{aligned} \text{L.H.S.} &= 2\cos(45° + A)\sin(45° - A) \\ &= \sin(45° + A + 45° - A) - \sin(45° + A - 45° + A) \\ &= \sin 90° - \sin 2A \\ &= 1 - \sin 2A \\ &= \sin^2 A + \cos^2 A - 2\sin A\cos A \\ &= (\sin A - \cos A)^2 \end{aligned}$$

= R.H.S., प्रमाणित भयो ।

उदाहरण 5

प्रमाणित गर्नुहोस् : $\sin\theta\sin(60°+\theta)\sin(60° - \theta) = \frac{1}{4}\sin 3\theta$

समाधान : यहाँ,

$$\begin{aligned} \text{L.H.S.} &= \sin\theta\sin(60° + \theta)\sin(60° - \theta) \\ &= \frac{1}{2}\sin\theta[2\sin(60° + \theta)\sin(60° - \theta)] \\ &= \frac{1}{2}\sin\theta[\cos(60° + \theta - 60° + \theta) - \cos(60° + \theta + 60° - \theta)] \\ &= \frac{1}{2}\sin\theta[\cos 2\theta - \cos 120°] \\ &= \frac{1}{2}\sin\theta\left[\cos 2\theta + \frac{1}{2}\right] \\ &= \frac{1}{2}\sin\theta\cos 2\theta + \frac{1}{4}\sin\theta \\ &= \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 2\cos 2\theta\sin\theta + \frac{1}{4}\sin\theta \\ &= \frac{1}{4}[\sin(2\theta + \theta) - \sin(2\theta - \theta)] + \frac{1}{4}\sin\theta \\ &= \frac{1}{4}[\sin 3\theta - \sin\theta] + \frac{1}{4}\sin\theta \\ &= \frac{1}{4}\sin 3\theta - \frac{1}{4}\sin\theta + \frac{1}{4}\sin\theta \end{aligned}$$

$= \frac{1}{4} \sin 3\theta$

= R.H.S, प्रमाणित भयो ।

उदाहरण 6

प्रमाणित गर्नुहोस् : $\frac{\cos\theta - \cos 2\theta + \cos 3\theta}{\sin\theta - \sin 2\theta + \sin 3\theta} = \cot 2\theta$

समाधान : यहाँ,

$$\text{L.H.S.} = \frac{\cos\theta - \cos 2\theta + \cos 3\theta}{\sin\theta - \sin 2\theta + \sin 3\theta}$$

$$= \frac{\cos 3\theta + \cos\theta - \cos 2\theta}{\sin 3\theta + \sin\theta - \sin 2\theta}$$

$$= \frac{2\cos\frac{3\theta+\theta}{2}\cos\frac{3\theta-\theta}{2} - \cos 2\theta}{2\sin\frac{3\theta+\theta}{2}\cos\frac{3\theta-\theta}{2} - \sin 2\theta}$$

$$= \frac{2\cos 2\theta\cos\theta - \cos 2\theta}{2\sin 2\theta\cos\theta - \sin 2\theta}$$

$$= \frac{\cos 2\theta\,(2\cos\theta - 1)}{\sin 2\theta\,(2\cos\theta - 1)}$$

$$= \frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta} \quad = \cot 2\theta$$

= R.H.S., प्रमाणित भयो ।

उदाहरण 7

प्रमाणित गर्नुहोस् : $\sin 20° \sin 40° \sin 80° = \frac{\sqrt{3}}{8}$

समाधान : यहाँ,

L.H.S. = sin 20° sin 40° sin 80°

$$= \frac{1}{2}\sin 20° \,[2\sin 80° \sin 40°]$$

$$= \frac{1}{2}\sin 20° \,[(\cos 80° - 40°) - \cos(80° + 40°]$$

$= \frac{1}{2} \sin 20° [\cos 40° - \cos 120°]$

$= \frac{1}{2} \sin 20° [\cos 40° + \frac{1}{2}]$

$= \frac{1}{2} \sin 20° \cos 40° + \frac{1}{4} \sin 20°$

$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} (2\cos 40° \sin 20^0) + \frac{1}{4} \sin 20°$

$= \frac{1}{4} [\sin (40° + 20°) - \sin (40° - 20°)] + \frac{1}{4} \sin 20°$

$= \frac{1}{4} [\sin 60° - \sin 20°] + \frac{1}{4} \sin 20°$

$= \frac{1}{4} [\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin 20°] + \frac{1}{4} \sin 20°$

$= \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{4} \sin 20° + \frac{1}{4} \sin 20°$

$= \frac{\sqrt{3}}{8}$

= R.H.S, प्रमाणित भयो ।

अभ्यास 7.4

1. दिइएका प्रश्नहरूको उपयुक्त विकल्पमा ठिक चिह्न (✓) लगाउनुहोस् :

(क) तलका मध्ये 2 sin A cos B सँग बराबर हुने त्रिकोणमितीय अभिव्यञ्जक कुन हो ?

a. sin (A + B) – sin (A – B) b. sin (A + B) + sin (A – B)

c. cos(A + B) + cos (A – B) d. cos (A + B) – sin (A – B)

(ख) तलका मध्ये (sin A – sin B) सँग बराबर हुने त्रिकोणमितीय अभिव्यञ्जक कुन हो ?

a. $2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$ b. $-2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$

c. $2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$ d. $2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$

(ग) तलका मध्ये (cos C – cos D) सँग बराबर हुने त्रिकोणमितीय अभिव्यञ्जक कुन हो ?

a. $2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$ b. $2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$

c. $-2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{D-C}{2}$ d. $-2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}$

(घ) (cos 6A + cos 4A) लाई गुणनफलमा रूपान्तरण गर्दा के हुन्छ ?

a. 2 sin 6A cos 4A b. 2 sin 5A cos A

c. 2 cos 5A sin A d. 2 cos 5A cos A

(ङ) sin 60° + sin 40° कुन सँग बराबर हुन्छ ?

a. 2 sin 50° cos 10° b. 2 sin 50° sin 10°

c. 2 cos 50° sin 10° d. 2 cos 50° cos 5°

2. **तलका त्रिकोणमितीय अनुपातका गुणनफललाई योग र अन्तरमा रूपान्तरण गर्नुहोस् :**

(क) sin 50° cos 30° (ख) cos 25° cos 15°

(ग) cos 10A sin 6A (घ) sin 27° sin 32°

3. **तलका त्रिकोणमितीय अनुपातका योग वा अन्तरलाई गुणनफलमा रूपान्तरण गर्नुहोस् :**

(क) sin 50° + sin 30° (ख) cos 25° + cos 15°

(ग) cos 7A – cos 5A (घ) sin 67° – sin 43°

4. **प्रमाणित गर्नुहोस् :**

(क) $\cos 50° + \cos 40° = \sqrt{2}\cos 5°$ (ख) $\sin 50° - \sin 70° = -\sin 10°$

(ग) $\sin 10° + \sin 70° = \sqrt{3}\sin 40°$ (ग) $\sin 10° + \sin 70° = \sqrt{3}\sin 40°$

(घ) $\cos 40° - \sin 40° = \sqrt{2}\sin 5°$ (ङ) $\sin 37° - \cos 67° = \sqrt{3}\sin 7°$

5. **प्रमाणित गर्नुहोस् :**

(क) $\frac{\cos 10° - \sin 10°}{\cos 10^0 + \sin 10^0} = \tan 35°$ (ख) $\frac{\cos 9^0 - \sin 9^0}{\cos 9^0 + \sin 9^0} = \cot 54^0$

(ग) $\frac{\cos 12° - \sin 12°}{\cos 12^0 + \sin 12^0} = \tan 33°$ (घ) $\frac{\sin A - \sin B}{\sin A + \sin B} = \cot\frac{A+B}{2}\tan\frac{A-B}{2}$

(ङ) $\frac{\cos B - \cos A}{\sin A + \sin B} = \tan\frac{A-B}{2}$ (च) $\frac{\sin(60°+A) + \sin(60°-A)}{\cos(60°+A) + \cos(60°-A)} = \sqrt{3}$

(छ) $2\sin(45° + \emptyset)\cos(45° - \emptyset) = 1 + \sin 2\emptyset$

(ज) $2\cos(45° + \theta)\cos(45° - \theta) = \cos 2\theta$

6. **प्रमाणित गर्नुहोस् :**

(क) $\frac{\sin\theta + \sin 3\theta - \sin 2\theta}{\cos\theta - \cos 2\theta + \cos 3\theta} = \tan 2\theta$ (ख) $\frac{\sin 2A + \sin 3A + \sin 5A + \sin 6A}{\cos 2A + \cos 3A + \cos 5A + \sin 6A} = \tan 4A$

(ग) $\frac{\sin A - \sin 3A + \sin 5A - \sin 7A}{\cos A - \cos 3A - \cos 5A + \cos 7A} = \cot 3A$

(घ) $\frac{\cos 3A \cos 2A - \sin 5A \sin 7A}{\sin 4A \sin 3A - \sin 2A \sin 5A} = 4 \sin 5A \cos A$

7. **प्रमाणित गर्नुहोस् :**

(क) $4\cos\theta \cos(60° + \theta) \cos(60° - \theta) = \cos 3\theta$

(ख) $4\cot\theta \cot(60° + \theta) \cot(60° - \theta) = \cot 3\theta$

(ग) $\sec(45^0 + \frac{\theta}{2}) \sec(45^0 - \frac{\theta}{2}) = 2 \sec\theta$

(घ) $\tan(\frac{\pi^c}{4} + \theta) - \tan(\frac{\pi^c}{4} + \theta) = 2 \tan 2\theta$

8. **प्रमाणित गर्नुहोस् :**

(क) $\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ = \frac{1}{8}$

(ख) $\cos 10^\circ \cos 50^\circ \cos 70^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}$

(ग) $\sin 10^\circ \sin 30^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ = \frac{1}{16}$

(घ) $\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 60^\circ \sin 70^\circ = \frac{\sqrt{3}}{16}$

(ङ) $\cos 20^\circ \cos 30^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \frac{\sqrt{3}}{16}$

(च) $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{8}$

उत्तर

1. (क) b (ख) c (ग) d (घ) d (ङ) a

2. (क) $\frac{\sin 80^\circ + \sin 20^\circ}{2}$ (ख) $\frac{\cos 40^\circ + \cos 10^\circ}{2}$ (ग) $\frac{\sin 16A - \sin 4A}{2}$ (घ) $\frac{\cos 5^\circ - \cos 59^\circ}{2}$

3. (क) $2\sin 40° \cos 10°$ (ख) $2\cos 20° \cos 5°$ (ग) $-2 \sin 6A \sin A$ (घ) $2 \cos 55° \sin 12°$

7.6 अनुबन्धित सर्वसमिका (Conditional Identities)

क्रियाकलाप 1

तलका त्रिकोणमितीय सम्बन्धहरूमा θ, A र B का मानहरू क्रमशः $0^0, 30^0, 45^0, 60°, 90°, \ldots$ राख्नुहोस् । के ती सम्बन्धहरू, कोणहरू θ, A र B का सबै मानहरूका लागि सत्य हुन्छन्, छलफल गर्नुहोस् ।

(क) $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$

(ख) $\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$

(ग) $\sin (A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

(घ) $\sin A + \cos B = 1$

(ङ) $\tan A = \cot B$

यहाँ, सम्बन्धहरू (क), (ख) र (ग) सबै कोणका लागि सत्य हुन्छन् । तर सम्बन्ध (घ) र (ङ) सबै कोणका लागि सत्य हुँदैनन् ।

सबै त्रिकोणमितीय सम्बन्धहरू सबै कोणका लागि सत्य हुँदैनन् । जुन त्रिकोणमितीय सम्बन्धहरू सबै कोणका लागि सत्य हुन्छ, त्यसलाई त्रिकोणमितीय सर्वसमिका भनिन्छ । उदाहरणका लागि $\sin 2\theta = 2 \sin\theta \cos\theta$ सबै कोणका लागि सत्य हुन्छ, त्यसैले यो एउटा सर्वसमिका हो । तर, $\tan A = \cot B$ सबै कोणका लागि सत्य हुँदैन, $A + B = 90°$ को सर्त पूरा हुँदा मात्र सत्य हुन्छ, जुन त्रिकोणमितीय केही निश्चित सर्त पूरा हुँदा मात्र सत्य हुन्छ, त्यसलाई अनुबन्धित त्रिकोणमितीय सर्वसमिका भनिन्छ ।

उदाहरण 1

$A = 0°$ र $B = 30°$ हुँदा परीक्षण गर्नुहोस् : $\sin (A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

समाधान : यहाँ,

यहाँ, $A = 0°$ र $B = 30°$

L.H.S. $= \sin (A + B) = \sin (0° + 30°) = \sin 30° = \frac{1}{2}$

R.H.S. $= \sin A \cos B + \cos A \sin B$

$= \sin 0° \cos 30° + \cos 0° \sin 30° = 0 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

अतः L.H.S. = R.H.S.

उदाहरण 2

A = 0° र B = 45° हुँदा परीक्षण गर्नुहोस् : $\tan(A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$

समाधान : यहाँ,

L.H.S. = $\tan(A + B) = \tan(0° + 45°) = \tan 45° = 1$

R.H.S. = $\dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = \dfrac{\tan 0° + \tan 45°}{1 - \tan 0° \tan 45°} = \dfrac{0 + 1}{1 - 0 \times 1} = \dfrac{1}{1-0} = 1$

अत: L.H.S. = R.H.S.

उदाहरण 3

एउटा त्रिभुजका तीनओटा कोणहरू $\alpha = 90°$, $\beta = 45°$ र $\gamma = 45°$ हुँदा परीक्षण गर्नुहोस् :

(क) $\sin(\alpha + \beta) = \sin\gamma$ (ख) $\cos(\alpha + \beta) = -\cos\gamma$

समाधान : यहाँ,

यहाँ, L.H.S. = $\sin(\alpha + \beta) = \sin(90° + 45°) = \sin 135° = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

R.H.S. = $\sin\gamma = \sin 45° = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

अत: L.H.S. = R.H.S., परीक्षण भयो ।

(ख) $\cos(\alpha + \beta) = -\cos\gamma$

समाधान : यहाँ,

L.H.S. = cso $(\alpha + \beta) = \cos(90° + 45°) = \cos 135° = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

R.H.S. $= -\cos\gamma = -\cos 45° = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

अत: L.H.S. = R.H.S.

उदाहरण 4

A = 30°, B = 60° र C = 90° हुँदा परीक्षण गर्नुहोस् :
$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$

समाधान : यहाँ,

A = 30°, B = 60° र C = 90°

L.H.S. $= \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C$

$= \sin 2 \times 30° + \sin 2 \times 60° + \sin 2 \times 90° = \sin 60° + \sin 120° + \sin 180°$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 0 = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

R.H.S. $= 4 \sin A \sin B \sin C = 4 \sin 30° \sin 60° \sin 90°$

$$= 4 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 1 = \sqrt{3}$$

अतः L.H.S. = R.H.S.

उदाहरण 5

ΔABC का तीनओटा कोणहरू $A = 30°$, $B = 120°$ र $C = 30°$ छन् भने परीक्षण गर्नुहोस् :

$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$

समाधान : यहाँ,

$A = 30°$, $B = 120°$ र $C = 30°$ छन् ।

L.H.S. $= \tan A + \tan B + \tan C = \tan 30° + \tan 120° + \tan 30°$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} + (-\sqrt{3}) + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1 - 3 + 1}{\sqrt{3}} = \frac{-1}{\sqrt{3}}$$

R.H.S. $= \tan A \tan B \tan C = \tan 30° \tan 60° \tan 90°$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \times (-\sqrt{3}) \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{-1}{\sqrt{3}}$$

अतः L.H.S. = R.H.S.

उदाहरण 6

ΔABC का तीनओटा कोणहरू $A = 30°$, $B = 90°$ र $C = 60°$ छन् भने परीक्षण गर्नुहोस् :

$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2 \cos A \cos B \cos C$

समाधान : यहाँ,

ΔABC का तीनओटा कोणहरू $A = 30°$, $B = 90°$ र $C = 60°$ छन् ।

L.H.S. $= \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = \cos^2 30° + \cos^2 90° + \cos^2 60°$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 0 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3+1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

R.H.S. $= 1 - 2 \cos A \cos B \cos C$

$$= 1 - 2 \cos 30° \cos 90° \cos 60° = 1 - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 0 \times \frac{1}{2} = 1 - 0 = 1$$

अतः L.H.S. = R.H.S.

अभ्यास 7.5

1. **दिइएका प्रश्नहरूको उपयुक्त विकल्पमा ठिक चिह्न (✓) लगाउनुहोस् :**

(क) तलका मध्ये कुन कथन सही छ ?

a. सर्वसमिकामा सर्त आवश्यक हुन्छन् ।

b. अनुबन्धित सर्वसमिकाहरू सबै अवस्थामा सत्य हुन्छन् ।

c. सर्वसमिकाहरू सधैँ सत्य हुन्छन् ।

d. अनुबन्धित सर्वसमिकाहरू परीक्षण गर्न आवश्यक पर्दैन ।

(ख) $\tan A = 1$ भएमा A को मान कति हुन्छ ?

a. $0°$ b. $30°$ c. $45°$ d. $60°$

(ग) $\sin A = \cos B$ कुन अवस्थामा सही हुन्छ ?

a. $A = B$ b. $A + B = 90°$

c. $A - B = 90°$ d. $A + B = 180°$

(घ) तलका मध्ये कुन अनुबन्धित सर्वसमिका हो ?

a. $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ b. $1 + \tan^2 A = \sec^2 A$

c. यदि $A + B = 90°$ भए $\cot A = \tan B$ d. $\sin 2A = 2 \sin A \cos A$

(ङ) यदि $A + B + C = 180°$ हुँदा कुन सही हुन्छ ?

a. $\sin (A + B) = \cos C$ b. $\sin (A + B) = \sin C$

c. $\sin (A + B) = -\sin C$ d. $\sin (A + B) = -\cos C$

2. **एउटा त्रिभुजका तीनओटा कोणहरू $\alpha = 30°$, $\beta = 90°$ र $\gamma = 60°$ हुँदा परीक्षण गर्नुहोस् :**

(क) $\sin (\alpha + \beta) = \sin \gamma$ (ख) $\cos (\beta + \gamma) = -os\ \alpha$

(ग) $\tan (\alpha + \beta) = -\tan \gamma$ (घ) $\cot (\alpha + \gamma) = -\cot \beta$

(ङ) $\sin (\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}) = \cos \frac{\gamma}{2}$ (च) $\cos (\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}) = \sin \frac{\gamma}{2}$

3. **यदि $A = 30°$, $B = 120°$ र $C = 30°$ छन् भने परीक्षण गर्नुहोस् :**

(क) $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$

(ख) $\tan 2A + \tan 2B + \tan 2C = \tan 2A \tan 2B \tan 2C$

(ग) $\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A = 1$

(घ) $\cot 2A \cot 2B + \cot 2B \cot 2C + \cot 2C \cot 2A = 1$

(ङ) $\cot 3A \cot 3B + \cot 3B \cot 3C + \cot 3C \cot 3A = 0$

4. **यदि $\triangle ABC$ का तीनओटा कोणहरू $A = 30°$, $B = 90°$ र $C = 60°$ छन् भने परीक्षण गर्नुहोस् :**

(क) $\sin 2A - \sin 2B + \sin 2C = 4 \cos A \sin B \cos C$

(ख) $\sin 2A - \sin 2B - \sin 2C = 4 \sin A \cos B \cos C$

(ग) $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1 - 4 \cos A \cos B \cos C$

(घ) $\cos 2A - \cos 2B + \cos 2C = 1 - 4 \sin A \cos B \sin C$

5. **एउटा त्रिभुजका तीनओटा कोणहरू $\alpha = 45°$, $\beta = 45°$ र $\gamma = 90°$ छन् भने परीक्षण गर्नुहोस् :**

(क) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 4 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$

(ख) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta - \sin^2\gamma = 1 - 2 \cos\alpha \cos\beta \sin\gamma$

(ग) $\cos^2\alpha - \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 - 2 \sin\alpha \cos\beta \sin\gamma$

(घ) $\cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma = 2 \cos\alpha \sin\beta \sin\gamma - 1$

6. सर्वसमिका $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$ तल दिइएका मध्ये कुन कुन अवस्थामा मात्र मान्य हुन्छन्, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(क) $A + B = 90°$ र $C = 90°$ (ख) $A + B + C = 180°$

(ग) $A + B + C = 360°$ (घ) $A + B + C = 90°$

उत्तर

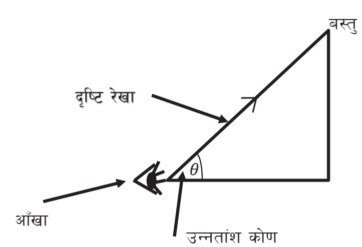
1. (क) c (ख) c (ग) b (घ) c (ङ) b

7.7 उचाइ र दुरी (Height and Distance)

हाम्रो दैनिक जीवनमा विभिन्न वस्तुहरूको उचाइ र ती वस्तुहरूबिचको दुरी पत्ता लगाउने खालका समस्या समाधान गर्नुपर्ने हुन्छ, जस्तै : विद्यालय भवन कति अग्लो छ ? दुईओटा बिजुलीको खम्बाबिचको दुरी कति छ ? आदि । यी सबै अवस्थामा प्रत्यक्ष रूपमा उचाइ नाप्न गाह्रो हुन्छ । यस्तो अवस्थामा समकोण त्रिभुजको कोण, भुजाको सम्बन्ध तथा त्रिकोणमितीय अनुपातहरू प्रयोग गरेर उचाइ र दुरीसम्बन्धी समस्याहरूको समाधान गर्न सकिन्छ ।

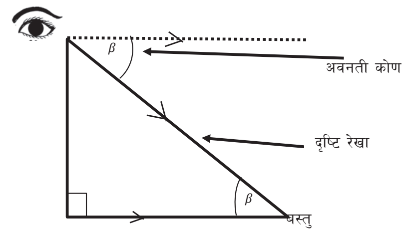
7.7.1 उन्नतांश र अवनति कोण (Angle of Elevation and Depression)

हामीले आँखाको सतहभन्दा माथि रहेको वस्तु हेर्दा दृष्टि रेखा र क्षितिज रेखाबिच बन्ने कोणलाई उन्नतांश कोण भनिन्छ, जस्तै : जमिनबाट घर, खम्बा वा रुखको टुप्पोमा हेर्दा बन्ने कोण उन्नतांश कोण हो । सँगैको चित्रमा, θ उन्नतांश कोण हो ।



त्यस्तै, जब हामी आँखाभन्दा तल रहेको वस्तु हेर्छौं, आँखाबाट

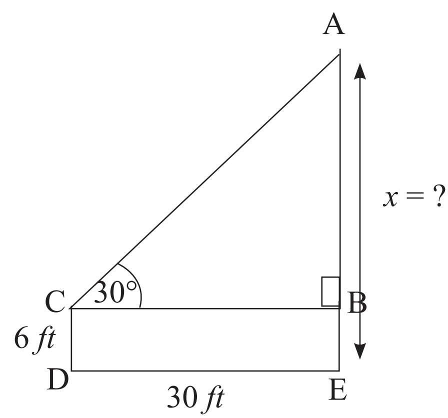
जाने दृष्टि रेखा र क्षितिज रेखाबिच बन्ने कोणलाई अवनति कोण भनिन्छ, जस्तै : घरको छतबाट आँगनमा बसेको चरा हेर्दा, धरहरा वा रुखबाट तल जमिनमा रहेको वस्तु हेर्दा बन्ने कोण अवनति कोण हो। सँगैको चित्रमा, β अवनति कोण हो।



उदाहरण 1

एकजना 6 *ft* अग्लो मानिसले 30 *ft* टाढाबाट एउटा रुखको टुप्पोमा हेर्दा उन्नतांश कोण 30° पाएछन् भने सो रुखको उचाइ कति रहेछ, पत्ता लगाउनुहोस्।

समाधान : यहाँ,



AE = रूखको उचाइ, CD = मानिसको उचाइ,

रुखको टुप्पो A मा हेर्दा बनाएको उन्नतांश कोण,

$\angle ACB = 30°$ र रुख र मानिसबिचको दुरी DE $= CB = 30\ ft$ छन्।

रुखको उचाइ (AE) $= x = ?$

समकोण ΔABC मा, $\tan 30^\circ = \frac{AB}{BC}$

अथवा, $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{AB}{30}$

अथवा, $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{AB}{30}$

अथवा, $\sqrt{3}\,AB = 30$

अथवा, $AB = \frac{30}{\sqrt{3}} = 17.32$

$AE = AB + BE$

$17.32 + 6 = 23.23$

अतः रुखको उचाइ $= 23.23\ ft$

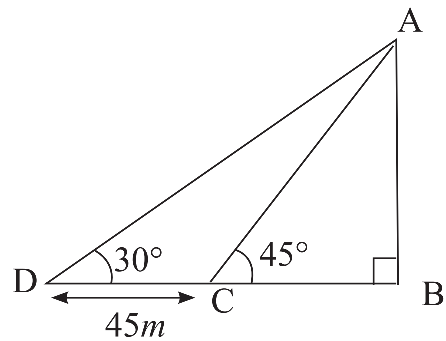
उदाहरण 2

एउटा रुखको टुप्पोलाई जमिनको एउटा विन्दुबाट अवलोकन गर्दा उन्नतांश कोण 45° पाइयो। सो विन्दुबाट 45 *m* टाढा गएर फेरि सोही रुखको टुप्पोमा अवलोकन गर्दा उन्नतांश कोण 30° पाइयो भने सो

रुखको उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

रुखको उचाइ = AB, दुई अवलोकन विन्दु C र D बाट रुखको टुप्पो A मा अवलोकन गर्दा बनेका उन्नतांश कोणहरू $\angle ACB = 45°$ र $\angle ADB = 30°$ छन् ।



CD = 45 m AB = ?

समकोण ΔABC मा, $\tan 45^0 = \frac{AB}{BC}$

अथवा, $1 = \frac{AB}{BC}$

अथवा, $AB = BC......(i)$

समकोण ΔABD मा, $\tan 30^\circ = \frac{AB}{BD}$

अथवा, $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{AB}{BC+CD}$

अथवा, $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{AB}{AB+45}$ [(i) बाट]

अथवा, $\sqrt{3}AB = AB + 45$

अथवा, $\sqrt{3}AB - AB = 45$

अथवा, $AB(\sqrt{3} - 1) = 45$

अथवा, $AB(1.732 - 1) = 45$

अथवा, $AB(0.732) = 45$

अथवा, $AB = \frac{45}{0.732}$

अथवा, $AB = 61.46$

अतः रुखको उचाइ = 61.46 m

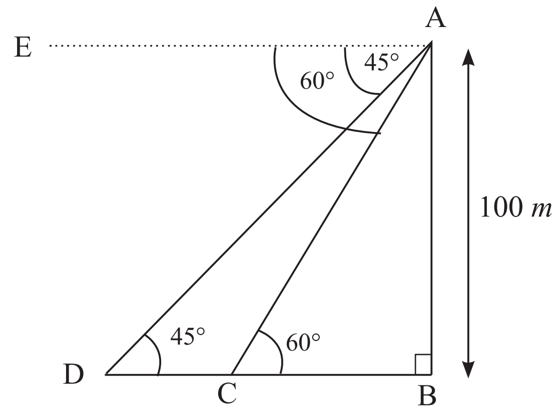
उदाहरण 3

एउटा 100 m अग्लो चट्टानको टुप्पोबाट समतल जमिनमा एकैतिर रहेका दुई विन्दुहरू अवलोकन गर्दा अवनति कोणहरू क्रमशः 60° र 45° पाइयो । ती दुई विन्दुबिचको दुरी पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

चट्टानको उचाइ $=$ AB चट्टानको टुप्पो A बाट दुई विन्दु C र D मा अवलोकन गर्दा बनेका अवनति कोणहरू $\angle EAC = \angle ACB = 60^0$ र $\angle EAD = \angle ADB = 45^0$ छन् ।

AB = 100 *m*



दुई विन्दुबिचको दुरी (CD) = ?

समकोण ΔABC मा, $tan\ 60^\circ = \frac{AB}{BC}$

अथवा, $\sqrt{3} = \frac{AB}{BC}$

अथवा, $\sqrt{3}\ BC = AB$

अथवा, $\sqrt{3}\ BC = 100$

अथवा, $BC = \frac{100}{\sqrt{3}}$

अथवा, BC = 57.74 ....(i)

अब, समकोण ΔABD मा, $tan\ 45^\circ = \frac{AB}{BD}$

अथवा, $1 = \frac{100}{BC + CD}$

अथवा, $1 = \frac{100}{57.74 + CD}$ [(i) बाट]

अथवा, $57.74 + CD = 100$

अथवा, $CD = 100 - 57.74$

अथवा, $CD = 42.26$

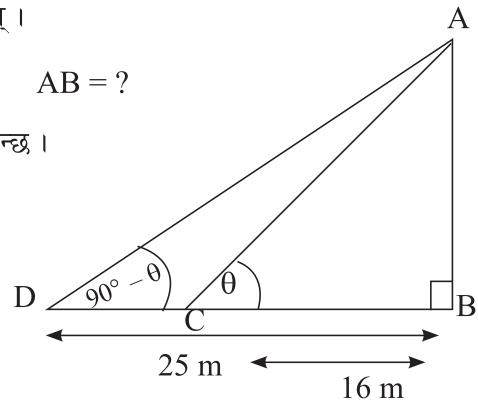
अतः दुई विन्दुबिचको दुरी (CD) = 42.26 *m*

उदाहरण 4

एउटा खम्बाको फेदबाट खम्बाको एकैतिर 25 m र 16 m दुरीमा रहेका दुई विन्दुबाट खम्बाको टुप्पो अवलोकन गर्दा बनेका कोणहरू समपूरक पाइयो भने सो खम्बाको उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

खम्बाको उचाइ $= AB$, दुई अवलोकन विन्दु C र D बाट खम्बाको टुप्पो A मा अवलोकन गर्दा बनेका उन्नतांश कोणहरू $\angle ACB$ र $\angle ADB$ छन् ।



$BC = 16$ m BD = 25 m AB = ?

मानौँ, $\angle ACB = \theta$ मान्दा $\angle ADB = 90° - \theta$ हुन्छ ।

समकोण ΔABC मा, $tan\theta = \frac{AB}{BC}$

अथवा, $tan\theta = \frac{AB}{16}$ ...... (i)

अब, समकोण ΔABD मा,

अथवा, $tan\,(90° - \theta) = \frac{AB}{25}$

अथवा, $cot\,\theta = \frac{AB}{25}$

अथवा, $\frac{1}{\tan\theta} = \frac{AB}{25}$

अथवा, $\frac{\tan\theta}{1} = \frac{25}{AB}$

अथवा, $\frac{AB}{16} = \frac{25}{AB}$ [(i) बाट]

अथवा, $(AB)^2 = 16 \times 25$

अथवा, $(AB)^2 = 400$

अथवा, $(AB)^2 = (20)^2$

अतः खम्बाको उचाइ = 20 m

उदाहरण 5

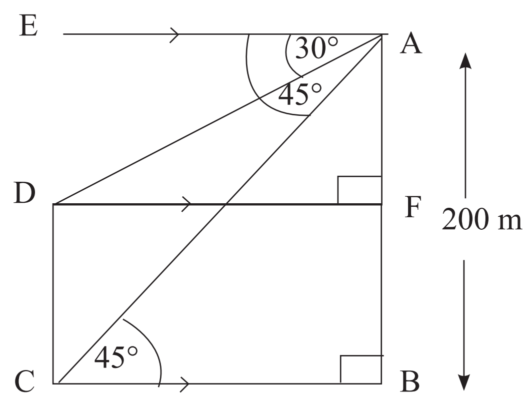
200 m अग्लो एउटा थुम्कोको टुप्पोबाट एउटा रुखको टुप्पो र फेदमा हेर्दा अवनति कोणहरू क्रमशः 30° र 45° पाइयो भने सो रुखको उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

थुम्कोको उचाइ $(AB) = 200\ m$,

थुम्कोको टुप्पो A बाट रुखको फेद C र टुप्पो D मा हेर्दा बनेका अवनति कोणहरू क्रमश: $\angle EAC = \angle ACB = 45°$ र $\angle EAD = \angle ADF = 30°$ छन् ।

रुखको उचाइ (CD) = ?



समकोण ΔABC मा, $\tan 45° = \frac{AB}{BC}$

अथवा, $1 = \frac{AB}{BC}$

अथवा, $1 = \frac{200}{BC}$

अथवा, $BC = 200$ ....(i)

अब, समकोण ΔAFD मा, $\tan 30^0 = \frac{AF}{DF}$

अथवा, $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{AF}{BC}$

अथवा, $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{AF}{200}$ [$\because$ (i) बाट]

अथवा, $\sqrt{3}\ AF = 200$

अथवा, $AF = \frac{200}{\sqrt{3}}$

अथवा, $AF = 115.47$

अथवा, $CD = BF = AB - AF$

अथवा, $CD = 200 - 115.47$

अथवा, $CD = 84.53$

अत: घरको उचाइ $= 84.53\ m$

अभ्यास 7.6

1. **दिइएका प्रश्नहरूको उपयुक्त विकल्पमा ठिक चिह्न (✓) लगाउनुहोस् :**

(क) तलतिर रहेको वस्तु हेर्दा दृष्टि रेखा र क्षितिज रेखाबिच बन्ने कोणलाई के भनिन्छ ?

a. अवनति कोण b. न्यूनकोण c. उन्नतांश कोण d. समकोण

(ख) माथिपट्टि रहेको वस्तु हेर्दा दृष्टि रेखा र क्षितिज रेखाबिच बन्ने कोणलाई के भनिन्छ ?

a. अवनति कोण b. न्यूनकोण c. उन्नतांश कोण d. समकोण

(ग) कुनै स्थानबाट एउटा बस्तुको अवलोकन गर्दा बन्ने उन्नतांश कोण 0° भयो भने सो वस्तु कहाँ हुन्छ ?

a. माथि b. तल c. आँखाको तहमा d. देखिँदैन

(घ) कुनै स्थानबाट एउटा खम्बाको टुप्पाको अवलोकन गर्दा बन्ने उन्नतांश कोण 45° भएको अवस्थामा खम्बाको उचाइ र सो स्थानबाट खम्बासम्मको दुरीको सम्बन्ध के हुन्छ ?

a. उचाइ > दुरी b. उचाइ < दुरी c. बराबर d. कुनै सम्बन्ध हुँदैन

(ङ) कुनै स्थानबाट एउटा टावरको टुप्पाको अवलोकन गर्दा बन्ने उन्नतांश कोण बढ्दै जाँदा दुरी कस्तो हुन्छ ?

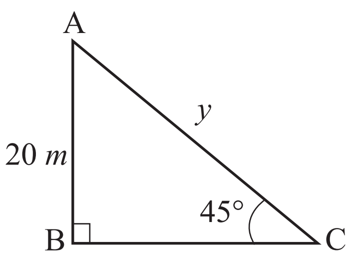
a. बढ्दै जान्छ b. घट्दै जान्छ c. उस्तै रहन्छ d. कुनै सम्बन्ध हुँदैन

(च) कुनै स्थानबाट 10 m टाढा रहेको $10\sqrt{3}\ m$ अग्लो रुखको टुप्पामा अवलोकन गर्दा कति डिग्रीको उन्नतांश कोण बन्छ ?

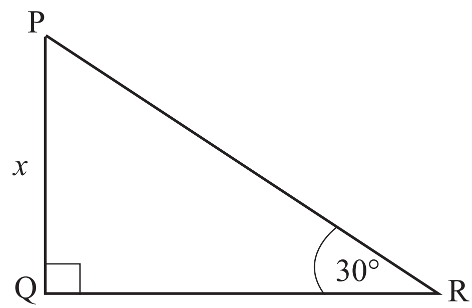
a. 30° b. 45° c. 60° d. 120°

2. दिइएका चित्रहरूमा x, y र θ का मान पत्ता लगाउनुहोस् :

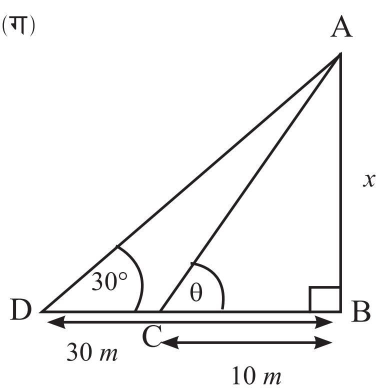
(क)



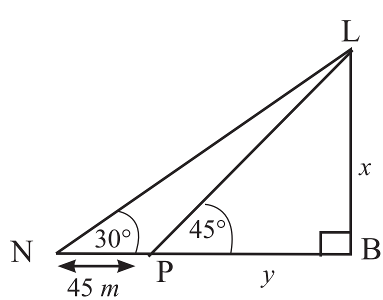
(ख)



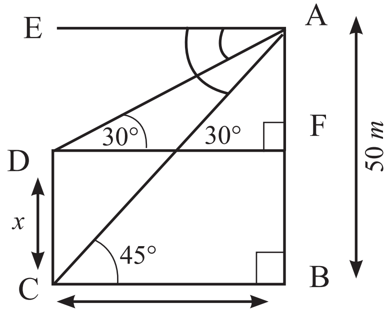
(ग)



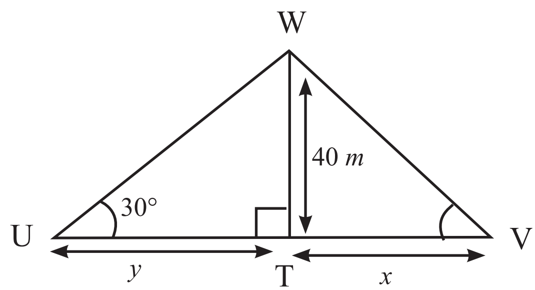
(घ)



(ङ)



(च)



3. (क) एउटा घरको छतको एउटा विन्दुलाई जमिनको एउटा विन्दुबाट अवलोकन गर्दा उन्नतांश कोण 60° पाइयो । सो विन्दुबाट 50 *m* टाढा गएर हेर्दा उन्नतांश कोण 30° पाइयो भने सो रुखको उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) एउटा 30 *ft.* अग्लो खम्बाको एकैतिर समतल सतहमा एउटै रहेका दुई विन्दुबाट सो खम्बाको टुप्पोको अवलोकन गर्दा उन्नतांश कोणहरू क्रमशः 60° र 45° पाइयो भने ती दुई विन्दुबिचको दुरी पत्ता लगाउनुहोस् ।

4. (क) एउटा 500 m अग्लो पहाडको टुप्पोबाट जमिनमा एकैतिर रहेका दुई विन्दुहरू अवलोकन गर्दा अवनति कोणहरू क्रमशः 60° र 30° पाइयो । ती दुई विन्दुबिचको दुरी पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) एउटा घरको छतबाट चउरमा एकैतिर एउटै रेखामा 10 *ft.* को दुरीमा बसेका दुई मानिसलाई अवलोकन गर्दा अवनति कोणहरू क्रमशः 60° र 45° पाइयो भने त्यो घरको उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।

5 (क) एउटा खम्बाको फेदबाट खम्बाको एकैतिर 40 *m* र 36 *m* दुरीमा रहेका दुई विन्दुबाट खम्बाको टुप्पो अवलोकन गर्दा बनेका कोणहरू एकअर्काका समपूरक पाइयो भने सो खम्बाको उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) 50 *m* दुरीमा रहेका दुईओटा खम्बामा एउटाको उचाइ अर्कोको दोब्बर छ । ती खम्बाका बिचमा पर्ने एक विन्दुबाट दुबै खम्बाका टुप्पो अवलोकन गर्दा बनेका कोणहरू एकअर्काका समपूरक पाइयो भने ती खम्बाको उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।

6 (क) एउटा समतल सतहमा रहेको खम्बाको छाया सूर्यको उचाइ 60° भएको समयमा भन्दा 30° भएको समयमा 50 *m* लामो हुन्छ भने सो खम्बाको उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) एउटा समतल सतहमा रहेको 35 *ft.* अग्लो खम्बाको छाया सूर्यको उचाइ 45° भएको

समयमा भन्दा 30° भएको समयमा $x\ ft$ लामो हुन्छ भने x को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

7 (क) $30\ m$ अग्लो एउटा भवनको छतबाट एउटा स्तम्भको टुप्पो र फेदमा हेर्दा अवनति कोणहरू क्रमशः 45° र 60° पाइयो भने सो स्तम्भको उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) एउटा मन्दिरको गजुरलाई एउटा भवनको छत र फेदबाट अवलोकन गर्दा अवनति र उन्नतांश कोणहरू क्रमशः 60° र 30° पाइयो । यदि भवनको उचाइ $20\ m$ भए मन्दिरको उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।

8. (क) एउटा टावरमाथि नेपालको झन्डा खडा गरिएको छ । टावरको फेदबाट $100\ m$ परेको विन्दुबाट टावरको टुप्पो र झन्डाको टुप्पोको उन्नतांश कोणहरू क्रमशः 45° र 60° बनएको छ भने सो झन्डाको उचाइ निकाल्नुहोस् ।

(ख) एक जना $1.8\ m$ अग्लो मानिसले एउटा घरको छत र झ्यालको माथिल्लो भागको अवलोकन गर्दा उन्नतांश कोणहरू क्रमशः 45° र 30° पाउँछ । यदि झ्यालको माथिल्लो भाग जमिनबाट $20\ m$ को उचाइमा छ भने सो घरको उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।

9. (क) एउटा $15\ m$ अग्लो घरको फेद र छतबाट एउटा स्तम्भको टुप्पामा हेर्दा उन्नतांश कोणहरू क्रमशः 60° र 45° पाइयो भने स्तम्भको उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) जमिनबाट $6000\ m$ को सिधा र समान उचाइमा उडिरहेको एउटा हवाईजहाज जमिनमा रहेको एउटा विन्दुबाट 30° को उन्नतांश कोणमा देखिन्छ । 10 सेकेन्डपछि सोही विन्दुबाट उन्नतांश कोण 45° मा देखिन्छ भने सो हवाईजहाजको गति कति km प्रतिघण्टा रहेछ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

10 (क) एउटा $30\ m$ फराकिलो बाटाको दुई किनारामा बराबर उचाइका दुईओटा खम्बाहरू रहेका छन् । दुईओटा खम्बाका बिचबाट ती खम्बाका टुप्पामा अवलोकन गर्दा क्रमशः 60° र 30° का उन्नतांश कोणहरू बन्छ भने ती खम्बाका उचाइ र खम्बादेखि अवलोकन विन्दुहरू सम्मका दुरी पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) दुईओटा खम्बाका बिचबाट एक जना $1.6\ m$ अग्लो मानिसले दुबै खम्बाको टुप्पामा अवलोकन गर्दा क्रमशः 60° र 45° का उन्नतांश कोणहरू पाउँछ । यदि होचो खम्बाको उचाइ $41.6\ m$ छ भने अग्लो खम्बाको उचाइ र ती खम्बाहरूबिचको दुरी पत्ता लगाउनुहोस् ।

11.(क) एउटा खम्बालाई एउटा विन्दुले जमिनबाट 4:5 को अनुपातमा विभाजन गरेको छ । दुबै भागले फेदबाट $20\ m$ टाढाको विन्दुमा बराबर कोणहरू बनाउँछ भने खम्बाको उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) एउटा टावरमाथि एउटा 5 m अग्लो झन्डा ठडाइएको छ । जमिनमा रहेको कुनै विन्दुमा टावर र झन्डाले क्रमशः 45° र 15° कोणहरू बनाउँछन् भने सो टावरको उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।

12. बराबर उचाइका दुईओटा खम्बाहरू छन् । दुबै खम्बाका बिचमा उभिएर एक जना मानिसले प्रत्येक खम्बाको टुप्पो अवलोकन गर्दा 45° को उन्नतांश कोण पाउँछ । एउटा खम्बातिर 20 m नजिक गएर फेरि अवलोकन गर्दा 60° को उन्नतांश कोण पाउँछ ।

(क) दिइएको सन्दर्भलाई चित्रमा रूपान्तरण गर्नुहोस् ।

(ख) खम्बाहरूको उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) खम्बाहरूबिचको दुरी पत्ता लगाउनुहोस् ।

(घ) जति खम्बाहरू नजिक गएर अवलोकन गर्‍यो उति नै उन्नतांश कोण बढ्दै जान्छ, किन, कारणसहित पुष्टि गर्नुहोस् ।

13. एउटा भवनको बाहिर भित्तामा भवनको छतबाट 4 m तल एउटा 10 m लामो भऱ्याङ तेर्साएर राखिएको छ । भऱ्याङको फेदबाट भवनको छतसम्मको उन्नतांश कोण 60° बनाएको छ भने

(ग) दिइएको सन्दर्भलाई प्रतिनिधित्व गर्ने चित्र निर्माण गर्नुहोस् ।

(ख) भऱ्याङको टुप्पाले घरको कुन उचाइमा छोएको छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) भऱ्याङको फेदबाट घर कति दुरीमा छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(घ) भऱ्याङको फेदबाट भवनको छतबाट 20 m तलको विन्दुमा बनाएको उन्नतांश कोण पत्ता लगाउनुहोस् ।

उत्तर

1.

(क) d	(ख) a	(ग) c	(घ) c	(ङ) c	(च) b	(छ) c

2. (क) $y = 20\sqrt{2}$ m (ख) $x = 5.77$ m (ग) $x = 10\sqrt{3}$ m, $\theta = 60^0$

(घ) $x = 61.48$ m, $y = 61.48$ m (ङ) $x = 21.13$ m, $y = 50$ m (च) $x = 40$, $y = 40\sqrt{3}$

3. (क) 43.30 m (ख) 12.68 *ft.* 4. (क) 577.35 m (ख) $x = 23.66$ ft. 5. (क) 37.95 m
(ख) 17.68 m, 35.36 m 6. (क) 43.30 m (ख) 25.62 m 7. (क) 12.68 m (ख) 5 m

8. (क) 73.2 m (ख) 33.32 m 9. (क) 35.49 m (ख) 1581.23 km/h 10. (क) 12.99 m
(ख) 15 m 11. (क) 15 m (ख) 6.83 m 12. (क) 47.32 m (ख) 94.64 m

परियोजना कार्य

क्लाइनोमिटर (clinometer) को नमुना तयार पार्नुहोस् ।

क्लाइनोमिटरको प्रयोग गरी विद्यालय हाताभित्रको कुनै एउटा विन्दुबाट नजिकको कुनै रुख वा विद्यालय भवनको छतको उन्नतांश कोण पत्ता लगाउनुहोस् । रुख वा विद्यालय भवनदेखि अवलोकन विन्दुसम्मको दुरी पनि नाप्नुहोस् र रुख वा विद्यालय भवनको उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् । एउटै रेखामा पर्ने विभिन्न विन्दुहरूबाट अवलोकन गर्दा बन्ने कोण र दुरी मापन गरी तिनीहरूको सम्बन्धको खोजी गर्नुहोस् । प्रतिवेदन तयार पारी कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

मिश्रित अभ्यास - विषयक्षेत्रगत

1. $\sqrt{2}\cos A \sin B = \frac{1}{2}$ र $\tan A + \cot B = 2$ दिइएको छ ।

   (क) A र B को कुनै दुईओटा मिश्रित कोण लेख्नुहोस् ।

   (ख) $(A - B)$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (ग) के A र B का सबै मानमा सम्बन्ध $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$ मान्य हुन्छ, कारणसहित लेख्नुहोस् ।

2. $\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$ दिइएको छ ।

   (क) cosA लाई $\sin\frac{A}{2}$ मा व्यक्त गर्नुहोस् ।

   (ख) 15° का कुनै दुईओटा अपवर्तक कोणहरू लेख्नुहोस् ।

   (ग) प्रमाणित गर्नुहोस् : $\sin\left(22\frac{1}{2}\right)° = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)$

3. त्रिभुज ABC का तीनओटा कोणहरु $A = 120°$, $B = 30°$ र $C = 30°$ छन् ।

   (क) cos 2A लाई cos A का रूपमा लेख्नुहोस् ।

   (ख) दिइएका कोणहरू प्रयोग गरी परीक्षण गर्नुहोस् : $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$

   (ग) के दिइएको त्रिभुज ABC मा $\tan A = \cot B$ सत्य हुन्छ, कारणसहित लेख्नुहोस् ।

4. एउटा घरको बाहिर भित्तामा छतबाट 9 *m* तल एउटा 9 *m* लामो भऱ्याङले जमिनको कुनै एउटा विन्दुमा 60° को उन्नतांश कोण बन्ने गरी राखिएको छ ।

   (क) दिइएको सन्दर्भलाई चित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

(ख) भऱ्याङको टुप्पाले घरको कुन उचाइमा छोएको छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) भऱ्याङको फेदबाट घर कति दुरीमा छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(घ) घरको छतबाट कति मिटर तल वा माथिको विन्दुमा भऱ्याङको टुप्पाले 30° को उन्नतांश कोण बनाउँछ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

5. बराबर उचाइका दुईओटा खम्बा छन् । दुबै खम्बाका बिचमा उभिएर एक जना मानिसले प्रत्येक खम्बाको टुप्पो अवलोकन गर्दा 60° को उन्नतांश कोण पाउँछ । एउटा खम्बातिर $60m$ नजिक गएर फेरि विपरीततर्फको खम्बा अवलोकन गर्दा 45° को उन्नतांश कोण पाउँछ ।

(क) उन्नतांश कोण भनेको के हो, लेख्नुहोस् ।

(ख) दिइएको सन्दर्भलाई चित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

(ग) खम्बाहरूको उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।

(घ) उक्त मानिस र खम्बाबिचको दुरीको उन्नतांश कोणसँग कस्तो सम्बन्ध हुन्छ, लेख्नुहोस् ।

उत्तर

1 (क) A + B र A – B (ख) 45° (ग) मान्य हुन्छ किनकि यो सर्वसमिका हो ।

2. (क) $\cos A = 1 - 2\sin^2\frac{A}{2}$ (ख) 30°, 45°

3. (क) $2\cos^2 A - 1$ 4. (ख) 7.79 m (ग) 4.5 m (घ) 12.29 m तल

5. (ग) 141.97 m (घ) अप्रत्यक्ष विचरण

पाठ 8

निर्देशाङ्क ज्यामिति (Coordinate Geometry)

8.0 परिचय (Introduction)

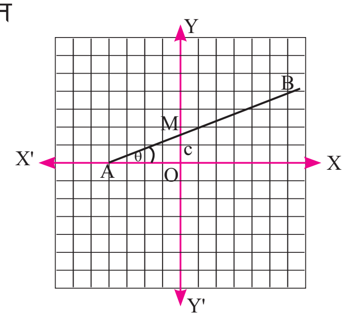
René Descartes

निर्देशाङ्क ज्यामिति (coordinate geometry) भन्नाले कुनै पनि विन्दुको स्थानलाई सङ्ख्यात्मक रूपमा निर्देशाङ्क (x, y) प्रयोग गरी व्यक्त गर्ने ज्यामितिलाई बुझाउँछ। निर्देशाङ्क ज्यामितिको अवधारणाको विकास गर्ने पहिलो व्यक्ति फ्रान्सेली गणितज्ञ René Descartes हुन्। उनकै नामबाट कार्टेसियन निर्देशाङ्क प्रणालीको (cartesian coordinates system) नाम राखिएको हो । उनीबाहेक Pierre de Fermat, Apollonius of Perga आदिको पनि यस क्षेत्रमा योगदान रहेको पाइन्छ । विन्दुहरूलाई सङ्ख्या (x, y) क्रमजोडामा व्यक्त गर्ने, सरल रेखा, वक्र रेखा, ज्यामितीय आकृतिलाई समीकरणद्वारा व्यक्त गर्ने काम उहाँहरूबाट भएको देखिन्छ । साथै वृत्त (circle), प्याराबोला (parabola), इलिप्स (ellipse), हाइपरबोला (hyperbola) आदिलाई बीजगणितीय रूपमा व्यक्त गर्ने काम गरेको पाइन्छ । निर्देशाङ्क बीजगणित र ज्यामितिका लागि साझा भाषा प्रदान गरेर कार्टेसियन निर्देशाङ्क प्रणालीको प्रयोग भौतिक विज्ञान, कम्प्युटर विज्ञान, इन्जिनियरिङ र खगोल विज्ञानमा गरेको पाइन्छ ।

8.1 दुई विन्दु भएर जाने रेखाको समीकरण (Equation of Lines Passing through Two Points)

(क) विन्दु झुकाव रूप (Point slope form) को रेखाको समीकरण

कुनै विन्दुबाट जाने र झुकाव थाहा भएको अवस्थामा सिधा रेखाको समीकरण निम्नअनुसार पत्ता लगाउन सकिन्छ :



चित्रमा रेखा AB को झुकाव $\tan\theta = m$ छ ।
रेखा AB मा पर्ने कुनै विन्दु P (x, y) लिऔँ ।
यहाँ झुकाव m भएको कुनै पनि रेखाको y खण्ड (OM) $= c$ छ भने रेखाको समीकरण यस प्रकार हुन्छ ।

$y = mx + c$ ....(i)

दिइएको रेखा विन्दु Q (x_1, y_1) भएर जान्छ, त्यसैले सो विन्दुले समीकरण (i) लाई सन्तुष्ट बनाउँछ ।

त्यसकारण, $y_1 = mx_1 + c$ ....(ii)

अब, समीकरण (i) बाट समीकरण (ii) घटाउँदा

$$y - y_1 = mx + c - (mx_1 + c)$$

अथवा, $y - y_1 = mx + c - mx_1 - c$

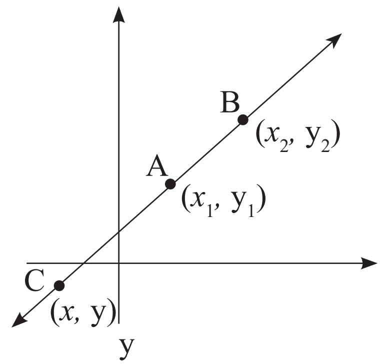
अथवा, $y - y_1 = mx - mx_1$

अथवा, $y - y_1 = m(x - x_1)$

अतः दिइएको विन्दु (x_1, y_1) भएर जाने र झुकाव m भएको रेखाको समीकरण $y - y_1 = m(x - x_1)$ हो ।

(ख) दुई विन्दु भएर जाने रेखाको समीकरण (Equation of Lines Passing through Two Points)

मानौं, दुई विन्दुहरू A (x_1, y_1) र B (x_2, y_2) छन् ।
दुई विन्दुहरू भएर जाने एउटा रेखा AB छ ।
रेखा AB मा अर्को कुनै एउटा विन्दु C (x, y) भए



अब, सूत्रअनुसार, रेखाखण्ड AB को झुकाव $(m_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
त्यसै गरी, रेखाखण्ड CA को झुकावका लागि

मानौं, A $(x_1, y_1) = (x_1, y_1)$ र C $(x, y) = (x_2, y_2)$

सूत्रअनुसार, $(m_2) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$

यदि विन्दुहरू C, A र B एउटै सिधा रेखामा पर्छन् भने तिनीहरूको झुकाव बराबर हुन्छ ।

अतः रेखाखण्ड AB को झुकाव (m_1) = रेखाखण्ड CA को झुकाव (m_2)

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

अथवा, $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

अतः दिइएका दुई विन्दुहरू (x_1, y_1) र (x_2, y_2) भएर जाने रेखाको समीकरण

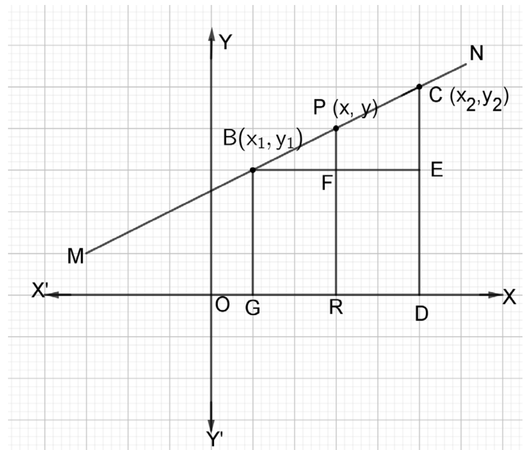
$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ हो ।

विचारणीय प्रश्न : के रेखाखण्ड AB को झुकाव र रेखाखण्ड BC को झुकाव बराबर गर्दा पनि रेखाको समीकरण एउटै आउँछ त, सोच्नुहोस् र छलफल गर्नुहोस् ।

अर्को तरीका

सँगै दिइएको चित्रमा सिधारेखा MN विन्दुहरू B (x_1, y_1) र C (x_2, y_2) भएर गएको छ । सो रेखामा कुनै विन्दु P (x, y) लिऔं ।

अब, OX मा BG, PR र CD लम्बहरू खिचौँ। त्यसै गरी CD मा लम्ब BE खिचौँ। यसले PR लाई F मा काट्छ। यहाँ,



$BF = GR = OR - OG = x - x_1$

$BE = GD = OD - OG = x_2 - x_1$

त्यसै गरी, $PF = PR - FR = PR - BG$

$= y - y_1$

$CE = CD - ED = CD - BG = y_2 - y_1$ हुन्छ।

त्रिभुजहरू BPF र BCE समरूप त्रिभुजहरू हुन्। (कसरी ?) त्यसैले $\frac{BF}{BE} = \frac{PF}{CE}$ हुन्छ।

अथवा, $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ = जहाँ $x_1 \neq x_2$ र $y_1 \neq y_2$ छ।

अथवा, $y - y_1 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}(y_2 - y_1)$

अथवा, $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

अत: दिइएका दुई विन्दुहरू (x_1, y_1) र (x_2, y_2) भएर जाने रेखाको समीकरण हो।

उदाहरण 1

चित्रमा विन्दुहरू A (–1, 1) र B (3, 2) भएर जाने सरल रेखा AB को समीकरण पत्ता लगाउनुहोस्।

समाधान

मानौं, $A(-1, 1) = (x_1, y_1)$ र $B(3, 2) = (x_2, y_2)$

सूत्रअनुसार, दुई विन्दुहरू भएर जाने रेखाको समीकरण, $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

अथवा, $y - 1 = \frac{2 - 1}{3 - (-1)}\{x - (-1)\}$

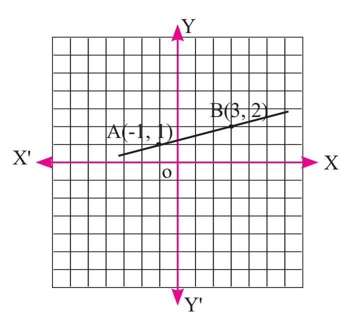
अथवा, $y - 1 = \frac{1}{3 + 1}(x + 1)$

अथवा, $y - 1 = \frac{1}{4}(x + 1)$

अथवा, $4(y - 1) = x + 1$

अथवा, $4y - 4 = x + 1$

अत: $x - 4y + 5 = 0$ रेखा AB को आवश्यक समीकरण हो।



विचारणीय प्रश्न : यदि दुई विन्दु भएर जाने रेखाको समीकरण पत्ता लगाउन कुन विन्दुलाई (x_1, y_1) र कुन विन्दुलाई (x_2, y_2) छनिएको छ भन्ने तथ्यले फरक पार्छ कि पार्दैन, उदाहरणसहित पुष्टि गर्नुहोस् ।

उदाहरण 2

विन्दुहरू A (–5, 3), B (–10, 6) र C (5, –3) दिइएका छन् ।

(क) रेखा AB को समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) दिइएका तीन विन्दुहरू समरेख हुन्छन् भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

मानौं, A (–5, 3), = (x_1, y_1) र B (–10, 6)) = (x_2, y_2)

(क) सूत्रअनुसार, दुई विन्दु भएर जाने रेखाको समीकरण, $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

अथवा, $y - 3 = \frac{6-3}{-10-(-5)}\{x - (-5)\}$

अथवा, $y - 3 = \frac{3}{-10+5}(x + 5)$

अथवा, $y - 3 = \frac{3}{-5}(x + 5)$

अथवा, $-5(y - 3) = 3x + 15$

अथवा, $0 = 3x + 15 + 5y - 15$

अत: $3x + 5y = 0$.........(i) दिइएको रेखाको आवश्यक समीकरण हो ।

> **विचारणीय प्रश्न :** विन्दु A र B को सट्टामा A र C वा B र C विन्दुहरू लिँदा पनि सो रेखाको समीकरण एउटै हुन्छ वा हुँदैन ?

(ख) अब, समीकरण (i) मा C (5, –3) प्रतिस्थापन गर्दा, $3 \times 5 + 5 \times (-3) = 0$

अथवा, $15 - 15 = 0$ अथवा, $0 = 0$ जुन सत्य छ ।

त्यसैले तेस्रो विन्दु C (5, –3) पनि समीकरण (i) को रेखामा पर्छ । अत: विन्दुहरू A (–5, 3), B (–10, 6) र C (5, –3) समरेख (collinear) हुन्छन् र यी तीन विन्दुहरू भएर जाने सरल रेखाको समीकरण $3x + 5y = 0$ हो ।

उदाहरण 3

दुई सिधा रेखा $3x + y = 2$ र $5x + 2y = 3$ को प्रतिच्छेदित विन्दु र (3, 1) भएर जाने एउटा सिधा रेखा छ ।

(क) दुई सिधा रेखाको प्रतिच्छेदित विन्दुका निर्देशाङ्कहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) प्रतिच्छेदित विन्दु र (3, 1) भएर जाने एउटा सिधा रेखाको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

(क) दुई सिधा रेखाका समीकरण,

$3x + y = 2$ ....(i) र $5x + 2y = 3$..................(ii) छन् ।

समीकरण (i) बाट, $y = 2 - 3x$

y को मान समीकरण (ii) मा राख्दा

अथवा, $5x + 2(2 - 3x) = 3$

अथवा, $5x + 4 - 6x = 3$

अथवा, $-x = 3 - 4$

अथवा, $x = 1$

फेरि, $x = 1$ समीकरण $y = 2 - 3x$ मा राख्दा

$y = 2 - 3 \times 1 = -1$

अत: दुई रेखा प्रतिच्छेदन भएको विन्दुको निर्देशाङ्क $(1, -1)$ हुन्छ ।

(ख) मानौँ, $(3, 1) = (x_1, y_1)$ र $(1, -1) = (x_2, y_2)$

सूत्रअनुसार, दुई विन्दु भएर जाने रेखाको समीकरण, $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

अथवा, $y - 1 = \frac{-1 - 1}{1 - 3}(x - 3)$

अथवा, $y - 1 = \frac{-2}{-2}(x - 3)$

अथवा, y अथवा, $y - 1 = (x - 3)$

अथवा, $0 = x - y - 3 + 1$

अथवा, $x - y - 2 = 0$

अत: रेखाको आवश्यक समीकरण $x - y - 2 = 0$ हो ।

अभ्यास 8.1

1. दिइएका प्रश्नहरूको उपयुक्त विकल्पमा ठिक चिह्न (✓) लगाउनुहोस् :

(क) दुई विन्दु भएर जाने रेखाको समीकरण कुन हो ?

a. $y = mx + c$ b. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

c. $y - y_1 = m(x - x_1)$ d. $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

(ख) विन्दुहरू (2, 3) र (–1, 0) भएर जाने रेखाको समीकरण तलका मध्ये कुन हो ?

a. $x - y + 1 = 0$ b. $x + y + 1 = 0$

c. $x - y - 1 = 0$ d. $-x - y - 1 = 0$

(ग) विन्दुहरू (a, 0) र (0, b) भएर जाने रेखाको समीकरण कुन हो ?

a. $\frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1$ b. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

c. $bx + ay = 0$ d. $ax + by = 0$

(घ) विन्दुहरू (–4, –2) र (–3, 5) भएर जाने रेखाको समीकरण तलका मध्ये कुन हो ?

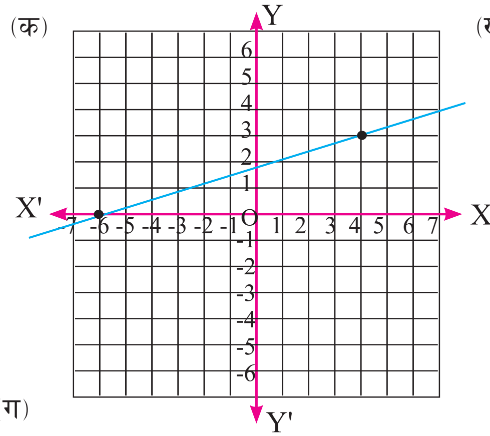
a. $y = 7x + 26$ b. $y = -7x + 26$

c. $y = -7x - 26$ d. $y = \frac{1}{7}x + 26$

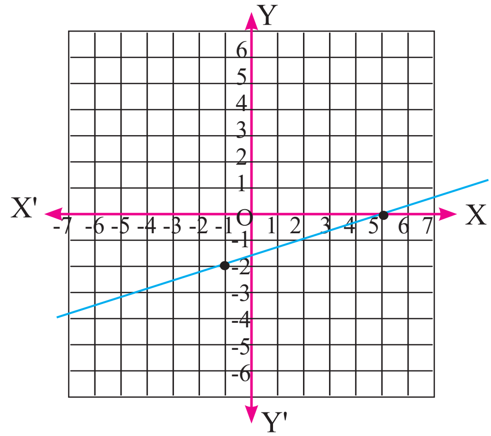
2. दुई विन्दुहरू दिइएको अवस्थामा रेखाको समीकरण कसरी पत्ता लगाउन सकिन्छ, वर्णन गर्नुहोस् ।

3. दिइएका लेखाचित्रले जनाउने समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् :

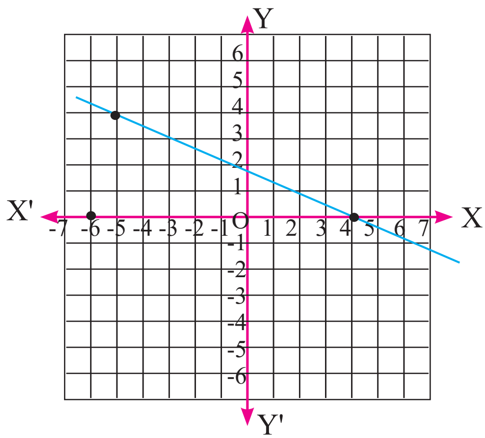
(क)



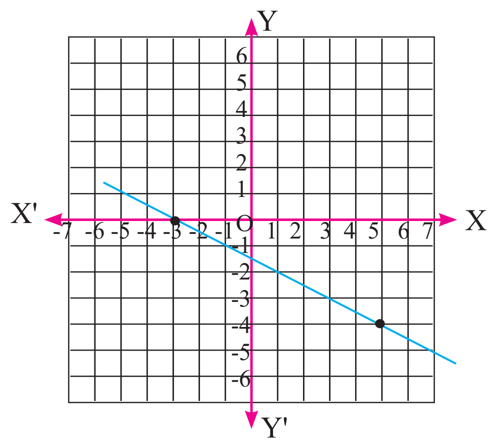
(ख)



(ग)



(घ)



4. दिइएका दुई विन्दुबाट जाने सिधा रेखाको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) (2, 3) र (–1, 0) (ख) (4, 3) र (–2, 4) (ग) (6, –3) र (–1, –5)

(घ) (0, –a) र (b, 0) (ङ) (p, 0) र (0, q) (च) (4, 3) र (5, 6)

5. दिइएका तीन विन्दुहरू समरेखा (collinear) हुन् भनी प्रमाणित गर्नुहोस् :

(क) (1, –1), (5, 2) र (9, 5) (ख) (–3, 0), (0, –6) र (–1, –4)

(ग) (2, 4), (4, 6) र (6, 8) (घ) (1, –1), (2, 1) र (4, 5)

(ङ) (7, –2), (2, 3) र (–1, 6) (च) (0,4), (3, –2) र (6, 0)

6. यदि तीन विन्दुहरू A (b, 0), B (0, c) र C (3, 3) एउटै सिधा रेखामा पर्छन् ।

(क) के विन्दु B (0, c) लाई रेखा AC को मध्यविन्दु भन्न सकिन्छ वा सकिँदैन, कारण दिनुहोस् ।

(ख) दुई विन्दु रूपको रेखाको समीकरणको प्रयोग गरी प्रमाणित गर्नुहोस् : $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{3}$

7. यदि तीन विन्दु A (p, 0), B (0, q) र C (5, 5) एउटै सिधा रेखामा पर्छन् ।

(क) दिइएका विन्दुहरू समरेखीय (collinear) छन् भन्नाले के बुझिन्छ, लेख्नुहोस् ।

(ख) दुई विन्दु रूपको रेखाको समीकरणको प्रयोग गरी प्रमाणित गर्नुहोस् : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{5}$

8. विन्दुहरू P(1, 0), Q (0, 1) र R (2, 3) त्रिभुजका शीर्षविन्दुहरू हुन् ।

(क) दिइएको अवस्थाअनुसार त्रिभुज PQR बनाउनुहोस् ।

(ख) भुजा QR को मध्यविन्दु पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) शीर्षविन्दु P बाट QR को मध्यविन्दु जोड्ने रेखाखण्ड (मध्यिका) को समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

9. विन्दुहरू A(2, 2), B (2, 8) र C (–6, 2) त्रिभुज ABC का शीर्षविन्दुहरू हुन् ।

(क) भुजा BC को मध्यविन्दु M पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) मध्यिका AM को लम्बाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) शीर्षविन्दु A(2, 2) बाट खिचिएको मध्यिकाको समीकरण $3x + 4y = 14$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

10. विन्दुहरू X(–1, 3), Y (1, –1) र Z (5, 1) त्रिभुज XYZ का शीर्षविन्दुहरू हुन् ।

(क) शीर्षविन्दु X (–1, 3) बाट खिचिएको मध्यिका XD को लम्बाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) मध्यिका XD को समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

11. दुई विन्दु A (a, b) र B (b, a) क्रमशः समीकरणहरू $6x - y = 1$ र $2x - 5y = 5$ मा पर्छन् भने तलका प्रश्नहरूको उत्तर दिनुहोस् :

(क) a र b का मानहरू पत्ता लगाउनुहोस् । (ख) विन्दुहरू A र B का निर्देशाङ्कहरू लेख्नुहोस् ।

(ग) A र B बिचको दुरी कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् । (घ) AB को समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

उत्तर

1. (क) (d) (ख) (a) (ग) (b) (घ) (a) 2. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

3. (क) $x - 3y + 5 = 0$ (ख) $x - 3y - 5 = 0$ (ग) $2x + 3y - 15 = 0$
(घ) $x + 2y + 4 = 0$ 4. (क) $x - y + 1 = 0$ (ख) $x + 6y - 22 = 0$
(ग) $2x - 7y - 33 = 0$ (घ) $ax - by - ab = 0$ (ङ) $qx + py - pq = 0$
(च) $3x - y - 9 = 0$ 5. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् । 6. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

7. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् । 8. (ख) (1, 2) (ग) $x = 1$ 9. (क) (–2, 5)
(ख) 5 units 10. (क) 5 units (ख) $3x + 4y - 9 = 0$

11. (क) a = 1, b = 5 (ख) A (1, 5) र B (5, 1) (ग) $4\sqrt{2}$ units (घ) $x + y - 6 = 0$

परियोजना कार्य

विद्यालय परिसरभित्रबाट कुनै दुई स्थान छनोट गर्नुहोस्, जस्तै :

(क) मुख्य गेट (ख) खेल मैदान (ग) कक्षाकोठा (घ) पुस्तकालय आदि

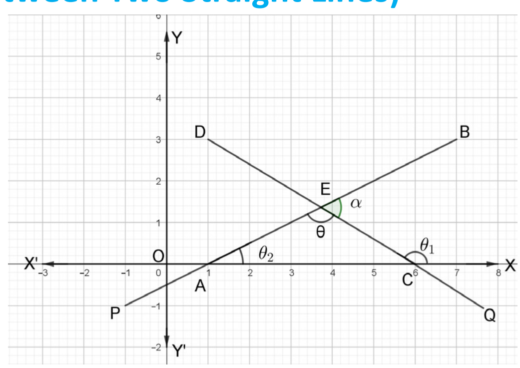
ती दुई स्थानलाई समतल सतह (graph paper वा cartesian plane) मा दुई विन्दुका निर्देशाङ्क (x_1, y_1) र (x_2, y_2) का रूपमा जनाउनुहोस् ।

(अ) ती दुई विन्दु जोड्ने रेखाका झुकाव (slope) गणना गर्नुहोस् ।

(आ) दुई विन्दु जोड्ने रेखाको समीकरण पनि पत्ता लगाउनुहोस् । प्राप्त रेखाको समीकरण विद्यालयका यी स्थानहरूबिचको सिधा बाटोलाई कसरी प्रतिनिधित्व गर्छ, व्याख्या लेख्नुहोस् ।

(इ) यदि मार्गलाई 5 मिटर दायाँ वा बायाँ सार्नुपरेमा नयाँ रेखाको समीकरण कस्तो हुन्छ, व्याख्या गर्नुहोस् । ती दुईओटा समीकरणहरूको झुकाव बराबर हुन्छ वा हुँदैन, शिक्षकसँग छलफल गरी निष्कर्ष निकाल्नुहोस् ।

8.2 दुई सरल रेखाबिचको कोण (Angle between Two Straight Lines)



सँगै दिइएको चित्रमा सिधा रेखाहरू PB र DQ विन्दु E मा काटिएका छन् र कोणहरू $\angle QEP = \theta$ र $\angle QEB = \alpha$ बनेका छन् । झुकाव खण्ड रूपमा रेखा DQ र PB को समीकरणहरू क्रमशः $y = m_1x + c$ र $y = m_2x + c$ छन् । रेखा DQ र रेखा PB ले x अक्षसँग क्रमशः बनाएका कोणहरू $\angle DCX = \theta_1$ र $\angle BAX = \theta_2$ छन् भने रेखा DQ को झुकाव $(m_1) = \tan\theta_1$ र रेखा BP को झुकाव $(m_2) = \tan\theta_2$ हुन्छ ।

त्रिभुज EAC मा, $\angle ECX = \angle AEC + \angle EAC$ ($\because$ त्रिभुजको बाहिरी कोण अनासन्न दुई भित्री कोणको योगफलसँग बराबर हुन्छ ।)

अथवा, $\theta_1 = \theta + \theta_2$

अथवा, $\theta = \theta_1 - \theta_2$

दुबैतर्फ त्रिकोणमितीय अनुपात tan लिँदा

$\tan\theta = \tan(\theta_1 - \theta_2)$

अथवा, $\tan\theta = \dfrac{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}{1 + \tan\theta_1 \tan\theta_2}$

अथवा, $\tan\theta = \dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$ ....(i) ($\because m_1 = \tan\theta_1$ र $m_2 = \tan\theta_2$)

हामीलाई थाहा छ, $\alpha = 180° - \theta$ ($\because$ आसन्न कोणको योगफल 180° हुने भएकाले)

दुबैतर्फ त्रिकोणमितीय अनुपात tan लिँदा

अथवा, $\tan\alpha = \tan(180° - \theta) = -\tan\theta$

$$= -\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(ii)}$$

समीकरण (i) र (ii) बाट

$$\tan\theta = \pm\left(\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right)$$

अतः दुई सिधा रेखाबिचको कोण $(\theta) = \tan^{-1} \pm \left(\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right)$ हुन्छ ।

यदि $\tan\theta$ को मान धनात्मक छ भने दुई रेखाबिचको कोण न्यूनकोण हुन्छ । त्यसै गरी यदि $\tan\theta$ को मान ऋणात्मक छ भने दुई रेखाबिचको कोण अधिककोण हुन्छ ।

दुई सरल रेखाहरू समानान्तर हुने अवस्था (Condition for Parallelism of Two Straight Lines)

यदि दुई सिधा रेखाहरू DQ र PB एकआपसमा समानान्तर छन् भने तिनीहरूबिचको कोण $(\theta) = 0°$ अथवा 180° हुन्छ । सँगैको चित्रमा DQ र PB एकआपसमा समानान्तर छन् ।

हामीलाई थाहा छ, $\tan\theta = \pm\left(\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right)$

अथवा, $\tan 0° = \pm\left(\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right)$

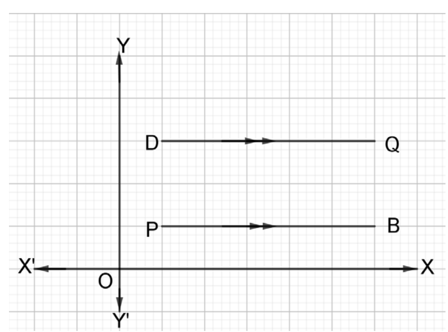
अथवा, $0 = \pm\left(\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right)$

अथवा, $0 \times (1 + m_1 m_2) = \pm(m_1 - m_2)$

अथवा, $0 = \pm(m_1 - m_2)$

अथवा, $0 = m_1 - m_2$

($\because$ 0 लाई ± 1 ले भाग गर्दा 0 नै हुन्छ)



अथवा, $m_1 = m_2$

अतः सरल रेखाहरू आपसमा समानान्तर छन् भने ती रेखाका झुकावहरू बराबर हुन्छन् ।

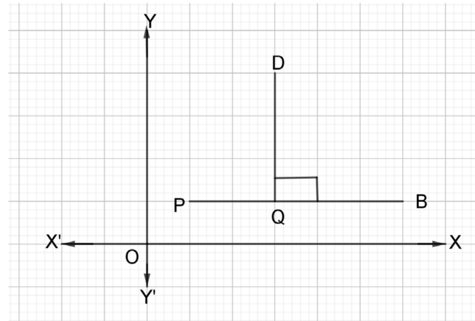
दुई सरल रेखाहरू लम्ब हुने अवस्था (Condition for Perpendicular of Two Straight Lines)

यदि दुई सरल रेखा DQ र PB एकआपसमा लम्ब छन् भने तिनीहरूबिचको कोण $(\theta) = 90°$ हुन्छ । सँगैको चित्रमा DQ र PB एकआपसमा लम्ब छन् ।

हामीलाई थाहा छ, $\tan\theta = \pm\left(\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right)$

अथवा, $\tan 90° = \pm\left(\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right)$

अथवा, $\frac{\sin 90^\circ}{\cos 90^\circ} = \pm\left(\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right)$



अथवा, $\frac{1}{0} = \pm\left(\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right)$

अथवा, $(1 + m_1 m_2) = \pm 0 \times (m_1 - m_2)$

अथवा, $(1 + m_1 m_2) = 0$

($\because$ 0 ले जुनसुकै मानलाई गुणन गर्दा 0 नै हुन्छ)

अथवा, $m_1 m_2 = -1$

अत: सरल रेखाहरू एकआपसमा लम्ब छन् भने ती रेखाका झुकावहरूको गुणनफल -1 हुन्छ ।

अथवा, $m_1 = \frac{-1}{m_2}$

अर्थात् झुकावहरू एकअर्काको ऋणात्मक व्यूतक्रम हुन्छ ।

क्रियाकलाप 1

दुई सरल रेखा साधारण स्वरूप $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ र $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ मा छन् भने तलका प्रश्नहरूमा छलफल गर्नुहोस् :

(क) ती रेखाहरूको झुकाव m_1 र m_2 कति हुन्छ ?

(ख) ती रेखाहरूबिचको कोण θ छ भने $\tan\theta = \pm\left(\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right)$ मा m_1 र m_2 को मान प्रतिस्थापन गर्दा θ को मान कति हुन्छ ?

पहिलो रेखा $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ को झुकाव $(m_1) = -\frac{x \text{ को गुणाङ्क}}{y \text{ को गुणाङ्क}} = -\frac{a_1}{b_1}$ हुन्छ ।

दोस्रो रेखा $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ को झुकाव $(m_2) = -\frac{x \text{ को गुणाङ्क}}{y \text{ को गुणाङ्क}} = -\frac{a_2}{b_2}$ हुन्छ ।

त्यसैले, $\tan\theta = \pm\left(\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right)$

अथवा, $\theta = \tan^{-1} \pm\left(\frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1 a_2 + b_1 b_2}\right)$ हुन्छ ।

क्रियाकलाप 2

समीकरण $ax + by + c = 0$ सँग समानान्तर हुने रेखाको समीकरण के हुन्छ, छलफल गर्नुहोस् ।

दिइएको समीकरण $ax + by + c = 0$……………………(i)

पहिला झुकाव पत्ता लगाउनुहोस् : झुकाव $(m_1) = -\frac{x \text{ को गुणाङ्क}}{y \text{ को गुणाङ्क}} = \frac{-a}{b}$

मानौं, समीकरण (i) सँग समानान्तर हुने रेखाको समीकरण, $y = m_2x + c_1 = 0$…………..(ii)

समीकरण (i) र (ii) समानान्तर भएकाले $m_2 = m_1$

अथवा, $m_2 = \frac{-a}{b}$

m_2 को मान समीकरण (ii) मा राख्दा, $y = \frac{-a}{b}x + c_1 = 0$

अथवा, $by = -ax + bc_1 = 0$

अथवा, $ax + by - bc_1 = 0$

अथवा, $ax + by + k = 0$ जहाँ, $k = -bc_1$ छ ।

अतः समीकरण $ax + by + c = 0$ सँग समानान्तर हुने रेखाको समीकरण $ax + by + k = 0$ हुन्छ ।

क्रियाकलाप 3

समीकरण $ax + by + c = 0$ सँग लम्ब हुने रेखाको समीकरण $bx - ay + k = 0$ हुन्छ, कसरी ? छलफल गर्नुहोस् र निष्कर्ष कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

दुई सरल रेखाहरूसँग सम्बन्धित सम्बन्धहरू

(क) दुई सिधा रेखाबिचको कोण $(\theta) = \tan^{-1} \pm \left(\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right)$

(ख) दुई सरल रेखा समानान्तर हुने अवस्था, $m_1 = m_2$

(ग) दुई सरल रेखा लम्ब हुने अवस्था, $m_1 m_2 = -1$, $m_1 = \frac{-1}{m_2}$

(घ) समीकरण $ax + by + c = 0$ सँग समानान्तर हुने रेखाको समीकरण $ax + by + k = 0$ हुन्छ ।

(ङ) समीकरण $ax + by + c = 0$ सँग लम्ब हुने रेखाको समीकरण $bx - ay + k = 0$ हुन्छ ।

उदाहरण 1

दुई सिधा रेखाका समीकरणहरू $3x + 4y - 10 = 0$, र $4x - 5y + 2 = 0$ छन् ।

(क) सिधा रेखाबिचको न्यूनकोण पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) सिधा रेखाबिचको अधिककोण पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

दिइएका समीकरणहरू $3x + 4y - 10 = 0$.........................(i)

र $4x - 5y + 2 = 0$.........................(ii)

समीकरण (i) बाट झुकाव $(m_1) = -\frac{x \text{ को गुणाङ्क}}{y \text{ को गुणाङ्क}} = \frac{-3}{4}$

समीकरण (ii) बाट झुकाव $(m_2) = -\dfrac{x \text{ को गुणाङ्क}}{y \text{ को गुणाङ्क}} = \dfrac{-4}{-5} = \dfrac{4}{5}$

(क) दुई रेखाबिचको कोण θ हो भने, $\tan\theta = \pm\left(\dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right)$

अथवा, $\tan\theta = \pm\left(\dfrac{\frac{-3}{4} - \frac{4}{5}}{1 + \left(\frac{-3}{4}\right) \times \frac{4}{5}}\right)$

अथवा, $\tan\theta = \pm\left(\dfrac{\frac{-3 \times 5 - 4 \times 4}{20}}{\left(\frac{20 - 12}{20}\right)}\right)$

अथवा, $\tan\theta = \pm\left(\dfrac{-15 - 16}{8}\right)$

अथवा, $\tan\theta = \pm\left(\dfrac{-31}{8}\right)$

अथवा, $\theta = \tan^{-1} \pm\left(\dfrac{31}{8}\right)$

अथवा, $\theta = 75.53°$

अतः दुई रेखाबिचको न्यूनकोण $\theta = 75.53°$ ($\because$ न्यूनकोणका लागि धनात्मक मान मात्र लिँदा)

(ख) फेरि, दुई रेखाबिचको अधिककोण $\theta = 180° - 75.53° = 104.47°$

उदाहरण 2

यदि सरल रेखाहरू $ax + 10y + 20 = 0$, र $4x - 8y + 7 = 0$ एकआपसमा समानान्तर छन् भने a को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

दिइएका समीकरणहरू $ax + 10y + 20 = 0$........................(i)

र $4x - 8y + 7 = 0$ ....(ii)

समीकरण (i) बाट झुकाव $(m_1) = -\dfrac{x \text{ को गुणाङ्क}}{y \text{ को गुणाङ्क}} = \dfrac{-a}{10}$

समीकरण (ii) बाट झुकाव $(m_2) = -\dfrac{x \text{ को गुणाङ्क}}{y \text{ को गुणाङ्क}} = \dfrac{-4}{-8} = \dfrac{1}{2}$

अब, दिइएका रेखाहरू समानान्तर भएकाले, $m_1 = m_2$

अथवा, $\dfrac{-a}{10} = \dfrac{1}{2}$

अथवा, $-2a = 10$

अथवा, $a = -5$

अतः a को मान -5 हुन्छ ।

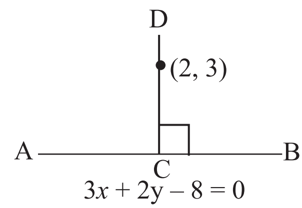
उदाहरण 3

विन्दु (2, 3) भएर जाने र रेखा $3x + 2y - 8 = 0$ सँग लम्ब हुने रेखाको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

मानौं, दिइएको रेखा AB को समीकरण $3x + 2y - 8 = 0$ ....(i)

विन्दु (2, 3) भएर जाने रेखा CD हो जुन AB मा लम्ब छ ।



समीकरण (i) बाट झुकाव $(m_1) = -\dfrac{x \text{ को गुणाङ्क}}{y \text{ को गुणाङ्क}} = \dfrac{-3}{2}$

अब, विन्दु (2, 3) भएर जाने रेखा CD को समीकरण,

$y - y_1 = m(x - x_1)$

अथवा, $y - 3 = m\,(x - 2)$ ....(ii)

समीकरण (ii) बाट झुकाव $(m_2) = m$

अब, दिइएका रेखा लम्ब भएकाले, $m_1.m_2 = -1$

अथवा, $\frac{-3}{2} \times m = -1$

अथवा, $m = \frac{2}{3}$

अब m को मान समीकरण (ii) मा

राख्दा, $y - 2 = m(x - 2)$

अथवा, $y - 3 = \frac{2}{3}(x - 2)$

अथवा, $3(y - 3) = 2\,(x - 2)$

अथवा, $3y - 9 = 2x - 4$

अथवा, $2x - 3y + 9 - 4 = 0$

अथवा, $2x - 3y + 5 = 0$

अर्को तरिका

दिइएको रेखाको समीकरण $3x + 2y - 8 = 0$

विन्दु (2, 3) भएर जाने रेखा CD हो जुन AB मा लम्ब छ ।

समीकरण (i) सँग लम्ब हुने रेखाको समीकरण

$2x - 3y + k = 0$ ....(i)

समीकरण (i) विन्दु (2, 3) भएर जान्छ । त्यसैले

$2 \times 2 - 3 \times 3 + k = 0$

अथवा, $4 - 9 + k = 0$

अथवा, $k = 5$

$k = 5$ समीकरण (i) मा राख्दा,

$2x - 3y + 5 = 0$, आवश्यक रेखाको समीकरण हो ।

अतः आवश्यक रेखाको समीकरण $2x - 3y + 2 = 0$ हो ।

उदाहरण 4

रेखाहरू $3x + y = 7$ र $4x - 3y = 5$ छन् ।

(क) प्रतिच्छेद विन्दु z को निर्देशाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) विन्दु z बाट जाने र रेखा $2x - y = 3$ सँग समानान्तर हुने रेखाको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

(क) मानौँ, प्रतिच्छेदित रेखाहरू AB र CD हुन् जसका समीकरणहरू

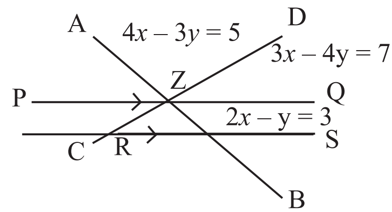
$3x + y = 7$.............................(i) र

$4x - 3y = 5$ ....(ii) छन् ।

रेखा PQ प्रतिच्छेदन विन्दु Z भएर जाने र समीकरण $2x - y = 3$ भएको अर्को रेखा RS सँग समानान्तर छ ।

$2x - y = 3$ ....(iii)

समीकरण (i) बाट, $y = (7 - 3x)$ समीकरण (ii) मा राख्दा,



अथवा, $4x - 3(7 - 3x) = 5$

अथवा, $4x - 21 + 9x = 5$

अथवा, $13x = 5 + 21$

अथवा, $x = \frac{26}{13} = 2$

$x = -4$ समीकरण (i) मा राख्दा, $y = 7 - 3 \times 2 = 7 - 6 = 1$

त्यसैले, प्रतिच्छेदन विन्दु Z को निर्देशाङ्क (2, 1) छ ।

(ख) रेखा $2x - y = 3$ सँग समानान्तर हुने रेखाको समीकरण $2x - y + k = 0$ .....(iv) हुन्छ ।

(iv) ले प्रतिनिधित्व गर्दा रेखा विन्दु (2, 1) भएर जाने हुनाले, $2 \times 2 - 1 + k = 0$

अथवा, $4 - 1 + k = 0$

अथवा, $k = -3$

अब, $k = 2$ समीकरण (iv) मा राख्दा $2x - y - 3 = 0$ हुन्छ ।

अत: रेखाको आवश्यक समीकरण $2x - y - 3 = 0$ हुन्छ ।

उदाहरण 5

विन्दुहरू (4, 3) र (8, 11) जोड्ने रेखाखण्डको लम्बार्धकको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

मानौँ, दुई विन्दुहरू (4, 3) र (8, 11) जोड्ने रेखाखण्ड AB सँग लम्बार्धक हुने रेखाखण्ड CD हो ।

मध्यविन्दु सूत्रअनुसार, रेखाखण्ड AB को मध्यविन्दुको निर्देशाङ्क

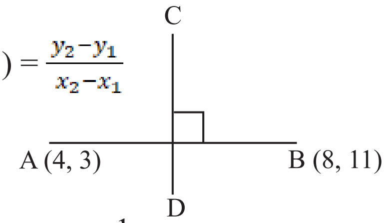
अथवा, $(x, y) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

अथवा, $(x, y) = \left(\frac{4 + 8}{2}, \frac{3 + 11}{2}\right)$

अथवा, $(x, y) = \left(\frac{12}{2}, \frac{14}{2}\right) = (6, 7)$

दुई विन्दुहरू (4, 3) र (8, 11) जोड्ने रेखाखण्डको झुकाव $(m_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$= \frac{11-3}{8-4} = \frac{8}{4} = 2$



मानौं, रेखाखण्ड CD को झुकाव $(m_2) = m$

प्रश्नानुसार, रेखाखण्ड AB रेखाखण्ड CD सँग लम्ब भएकाले, $m_1.m_2 = -1$

अथवा, $2.m = -1$

अथवा, $m = \frac{-1}{2}$

मध्यविन्दु (6, 7) भएर जाने लम्बार्धक रेखाखण्ड CD को समीकरण, $y - 7 = m(x - 6)$...... (i)

अब, समीकरण (i) मा $m = \frac{-1}{2}$ राख्दा, $y - 7 = \frac{-1}{2}(x - 6)$

अथवा, $2(y - 7) = -1(x - 7)$

अथवा, $2y - 14 = -x + 7$

अथवा, $x + 2y - 14 - 7 = 0$

अथवा, $x + 2y - 21 = 0$

अतः लम्बार्धकको आवश्यक समीकरण $x + 2y - 21 = 0$ हो ।

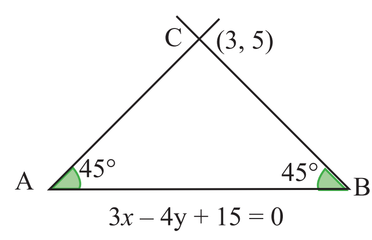
उदाहरण 7

विन्दु (3, 5) भएर जाने तथा रेखा $3x - 4y + 15 = 0$ सँग 45° को कोण बनाउने रेखाहरूको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

मानौं, दिइएको रेखा AB को समीकरण, $3x - 4y + 15 = 0$ ....(i)

विन्दु (3, 5) भएर जाने रेखाहरू AC र BC छन् ।
रेखा AC र BC ले रेखा AB सँग बनाएको कोण 45° छ ।



समीकरण (i) बाट रेखा AB को झुकाव

$(m_1) = -\frac{x \text{ को गुणाङ्क}}{y \text{ को गुणाङ्क}} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$

फेरि, (3, 5) भएर जाने रेखाको समीकरण, $y - 5 = m(x - 3)$........(ii)

समीकरण (i) बाट रेखाको झुकाव $(m_2) = m$

समीकरण (i) र (ii) ले बनाउने रेखाहरूबिचको कोण $(\theta) = 45°$ छ ।

सूत्रानुसार, $\tan\theta = \pm\left(\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right)$

अथवा, $\tan 45° = \pm\left(\dfrac{\frac{3}{4} - m}{1 + \frac{3}{4}.m}\right)$

अथवा, $1 = \pm\left(\dfrac{\frac{3-4m}{4}}{\frac{4+3m}{4}}\right)$

अथवा, $1 = \pm\left(\dfrac{3-4m}{4+3m}\right)$

अथवा, $4 + 3m = \pm(3 - 4m)$

धनात्मक चिह्न (+) लिँदा, $4 + 3m = (3 - 4m)$

अथवा, $3m + 4m = 3 - 4$

अथवा, $7m = -1$

अथवा, $m = \frac{-1}{7}$

ऋणात्मक चिह्न (–) लिँदा,

$4 + 3m = -(3 - 4m)$

अथवा, $4 + 3m = -3 + 4m$

अथवा, $3m - 4m = -3 - 4$

अथवा, $-m = -7$

अथवा, $m = 7$

पहिलो अवस्था, $m = \frac{-1}{7}$ समीकरण (ii) मा राख्दा

$y - 5 = \frac{-1}{7}(x - 3)$

अथवा, $7y - 35 = -x + 3$

अथवा, $x + 7y - 35 - 3 = 0$

अथवा, $x + 7y - 38 = 0$

दोस्रो अवस्था, $m = 7$ समीकरण (ii) मा राख्दा

$y - 5 = 7(x - 3)$

अथवा, $y - 5 = 7x - 21$

अथवा, $7x - y - 21 + 5 = 0$

अथवा, $7x - y - 16 = 0$

अत: आवश्यक समीकरणहरू, $x + 7y - 38 = 0$ र $x - y + 2 = 0$ हुन् ।

अभ्यास 8.2

1. दिइएका प्रश्नको उपयुक्त विकल्पमा ठिक चिह्न (✓) लगाउनुहोस् :

(क) दुई सरल रेखा $y = m_1x + c$ र $y = m_2x + c$ बिचको कोण पत्ता लगाउने सूत्र तलका मध्ये कुन हो ?

a. $\theta = \tan^{-1}\pm\left(\dfrac{m_1 + m_2}{1 - m_1 m_2}\right)$ b. $\theta = \tan^{-1}\pm\left(\dfrac{1 - m_1m_2}{m_1 - m_2}\right)$

c. $\theta = \tan^{-1}\pm\left(\dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right)$ d. $\theta = \tan^{-1}\pm\left(\dfrac{1 + m_1m_2}{m_1 - m_2}\right)$

(ख) दुई सरल रेखाहरू समानान्तर हुने अवस्था तलका मध्ये कुन हो ?

a. $m_1 - m_2 = 1$ b. $m_1m_2 = -1$ c. $m_1 + m_2 = -1$ d. $m_1 - m_2 = 0$

(ग) दुई सरल रेखाहरू लम्ब हुने अवस्था तलका मध्ये कुन हो ?

a. $m_1m_2 = 1$ b. $m_1m_2 = -1$ c. $m_1 + m_2 = -1$ d. $m_1 - m_2 = 0$

(घ) सरल रेखाहरू $3x - y - 7 = 0$ र $x + 3y - 6 = 0$ बिचको कोण कति हुन्छ ?

a. $0°$ b. $30°$ c. $45°$ d. $90°$

(ङ) सरल रेखाहरू $x - 3y - 2 = 0$ र $2x - y - 1 = 0$ बिचको न्यूनकोण कति हुन्छ ?

a. $0°$ b. $30°$ c. $45°$ d. $60°$

(च) सरल रेखाहरू $\sqrt{3}x - y - 5 = 0$ र $y + 10 = 0$ बिचको अधिककोण कति हुन्छ ?

a. $120°$ b. $135°$ c. $150°$ d. $160°$

2. दिइएका रेखाबिचको न्यूनकोण पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) $y - 3x - 4 = 0$ र $y = -2x + 1$ (ख) $y = 3x + 2$ र $x + 2y - 2 = 0$

3. दिइएका रेखाबिचको अधिककोण पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) $y = 3x + 4$ र $y = -2x + 1$ (ख) $2x + 3y - 4 = 0$ र $x + 2y - 3 = 0$

4. दिइएका रेखाबिचको कोणहरू पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) $3x + y - 2 = 0$ र $x + 3y + 12 = 0$ (ख) $2x - y + 3 = 0$ र $y = \frac{-1}{2}x - 4$

5. सिधा रेखाका समीकरणहरू दिइएका छन् । ती रेखाहरू एकआपसमा समानान्तर छन् भनी प्रमाणित गर्नुहोस् :

(क) $2x - 3y - 5 = 0$ र $2x - 3y = 12$ (ख) $x - 5y = 4$ र $3x - 15y + 12 = 0$

6. सिधा रेखाका समीकरणहरू दिइएका छन् । ती रेखाहरू एकआपसमा लम्ब छन् भनी प्रमाणित गर्नुहोस् :

(क) $y + \sqrt{3}x + 4 = 0$ र $x - \sqrt{3}y = 5$ (ख) $ax + by + c = 0$ र $bx - ay + c = 0$

7. दिइएका रेखाहरू एकआपसमा समानान्तर छन् भने *a, p, q* र *m* को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(क) $px + 3y - 12 = 0$ and $4y - 3x + 7 = 0$ (ख) $2x - 8y + 6 = 0$ र $qx - 12y - 4 = 3$

(ग) $ax + 3y - 4 = 0$ र $3x + 9y - 5 = 0$ (घ) $3x + my = 5$ र $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$

8. दिइएका रेखाहरू एकआपसमा लम्ब छन् भने *a, p, q* र *m* को मान पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) $px + 3y - 12 = 0$ र $4y - 3x + 7 = 0$ (ख) $2x + 3y + 6 = 0$ र $mx - 5y + 20 = 0$

(ग) $4x + 3y - 7 = 0$ र $3x + qy - 5 = 0$ (घ) $ax + 5y - 16 = 0$ र $6x + 10y - 9 = 0$

9. दिइएका रेखाहरू $px + qy + r = 0$ र $lx - my + n = 0$ छन् ।

(क) रेखा $px + qy + r = 0$ को झुकाव पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) रेखाहरू $px + qy + r = 0$ र $lx - my + n = 0$ आपसमा लम्ब छन् भने $pl = qm$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

10. (क) विन्दु (3, 4) भएर जाने र रेखा $3x + 4y - 12 = 0$ सँग समानान्तर हुने रेखाको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) विन्दुहरू (2, 3) र (3, – 1) जोड्ने रेखासँग समानान्तर हुने र विन्दु (3, 1) भएर जाने रेखाको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

11. (क) विन्दु (2, 5) भएर जाने र रेखा $2x + 5y + 31 = 0$ सँग लम्ब हुने रेखाको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) विन्दुहरू (4, 7) र (2, – 3) जोड्ने रेखासँग लम्ब हुने र विन्दु (3, 1) भएर जाने रेखाको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

12. (क) रेखाहरू $3x + 4y - 7 = 0$ र $5x - 2y - 3 = 0$ छन् ।

(अ) प्रतिच्छेदन विन्दु z को निर्देशाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

(आ) रेखा $2x + 3y = 5$ सँग लम्ब हुने एउटा सिधा रेखाको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) यदि सरल रेखा $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ रेखाहरू $x + y - 3 = 0$ र $2x - 3y - 1 = 0$ को प्रतिच्छेदन विन्दु भएर जाने र सिधा रेखा $x - y - 6 = 0$ सँग समानान्तर हुन्छ भने a र b को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

13. दिइएका दुई विन्दु जोड्ने रेखाको लम्बार्धकको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) (–2, 3) र (4, 7) (ख) (4, –2) र (–8, 9) (ग) (6, –5) र (–8, 9)

14. (क) रेखा $2x - 3y + 10 = 0$ सँग 45° को कोण बनाई विन्दु (3, –2) भएर जाने दुई रेखाहरूको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) विन्दु (0, 0) बाट जाने र रेखा $x + y + 3 = 0$ सँग 60° कोण बनाउने दुई रेखाहरूको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

उत्तर

1. (क) (c) (ख) (d) (ग) (b) (घ) (d) (ङ) (c) च) (a)
2. (क) 45° (ख) $\theta = \tan^{-1}(7)$ 3. (क) 135° (ख) 172.87°
4. (क) 53.13°, 126.86° (ख) 90°
5. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् । 7. (क) $p = -\frac{9}{4}$ (ख) $q = 3$ (ग) $a = 1$ (घ) $m = 2$
8. (क) $p = 4$ (ख) $m = \frac{15}{2}$ (ग) $q = -4$ (घ) $a = -\frac{25}{3}$
9. (क) $m_1 = \frac{-p}{q}$ 10. (क) $3x + 4y - 25 = 0$ (ख) $4x + y - 13 = 0$
11. (क) $5x - 2y = 0$ (ख) $x + 5y - 8 = 0$ 12. (क) $3x - 2y - 1 = 0$ (ख) 1, –1
13. (क) $3x + 2y - 13 = 0$ (ख) $24x - 22y + 125 = 0$ (ग) $x - y + 3 = 0$
14. (क) $5x - y - 17 = 0$ र $x + 5y + 7 = 0$ (ख) $(2 + \sqrt{3})x - y = 0$ र $(2 - \sqrt{3})x - y = 0$

परियोजना कार्य

तपाईँको समुदाय/विद्यालय वरिपरि वा कतै बाहिर घुम्न जाँदा तपाईँले देखेका कुनै दुई सडक (जस्तै : मुख्य सडक र सहायक सडक) को दुई दुई विन्दु टिपोट गरी तिनले बनाउने दुई रेखाको समीकरण लेख्नुहोस् । त्यसपछि ती दुई सडकबिचको कोण कति डिग्री छ भनेर गणना गर्नुहोस् । दिइएका तीन तथ्यहरू समावेश गरी रिपोर्ट तयार गर्नुहोस् :

(क) सडकहरूको वास्तविक नाम र तिनीहरूको फोटो समावेश गर्नुहोस् ।

(ख) दुई विन्दुबाट रेखाको समीकरण कसरी निकालियो, त्यसको व्याख्या गर्नुहोस् ।

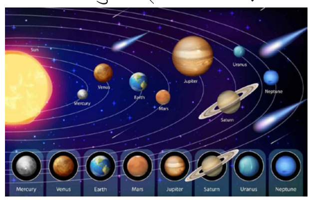
(ग) सडकहरूबिचको कोण न्यूनकोण, अधिककोण अथवा धेरै ठुलो छ भने सडक निर्माण योजनामा के असर पर्छ ? यदि कोण धेरै सानो छ भने यातायात सुरक्षामा के कस्ता समस्या देखिन्छन्, यस बारेमा अध्ययन गरी छोटो विश्लेषण रिपोर्टमा उल्लेख गर्नुहोस् । दुई बाटोहरू जोडिएको विन्दुलाई उद्गम विन्दु लिनुहोस् र 1 मिटर = 1 एकाइ लिई दुई विन्दुहरू टिपोट गर्नुहोस् ।

8.3 साङ्किक क्षेत्र (Conic Section)

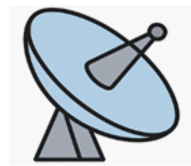
क्रियाकलाप 1

दिइएका चित्रहरूको अध्ययन गर्नुहोस् र सोधिएका प्रश्नहरूको उत्तर दिनुहोस् :

चित्र (क)



चित्र (ख)



चित्र (ग)

चित्र (घ)

चित्र (क) मा भएको घडीको अगाडिको सतह कुन आकारमा छ ?

चित्र (ख) मा भएको सौर्यमण्डलमा ग्रहले सूर्यलाई घुम्ने बाटो कुन आकारमा छ ?

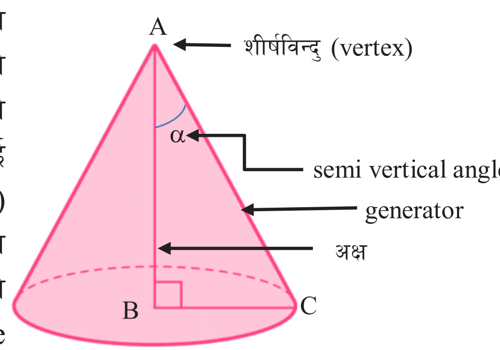
चित्र (ग) मा भएको नेपाल टेलिकमको डिस्क कुन ज्यामितीय आकारमा छ ?

चित्र (घ) मा भएको आवर ग्लास (hour glass) कुन ज्यामितीय आकारमा छ, छलफल गरी निष्कर्ष निकाल्नुहोस् ।

माथिको पहिलो चित्र (क) मा घडीको देखिने बाहिरी भाग वृत्त (circle) हो र यसको केन्द्रविन्दुबाट परिधिसम्मको दुरी सबैतिर बराबर हुन्छ । दोस्रो चित्र (ख) मा वृत्तका जस्तै गुणहरू छन् वा छैनन्, पक्कै पनि छैनन् । यस्तो आकृतिलाई दीर्घवृत्त (elipse) भनिन्छ । यसैगरी चित्र (ग) र (घ) मा टेलिकमको डिस्क र स्यान्ड घडी (hour glass) मा कस्ता ज्यामितीय गुणहरू छन् ? टेलिकमको डिस्क जस्तो आकृतिलाई पाराबोला (parabola) भनिन्छ र स्यान्ड घडी (hour glass) को जस्तो आकृतिलाई हाइपरबोला (hyperbola) भनिन्छ ।

8.3.1 सोलीका विभिन्न भागको परिचय (Introduction of Different Parts of Cone)

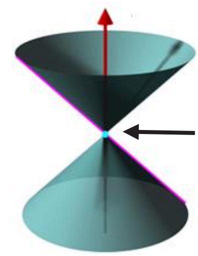
यी सबै आकृतिलाई दिइएको ज्यामितीय ठोस वस्तु समकोणी सोलीबाट निर्माण गर्न सकिन्छ । चित्र (ङ) मा एउटा समकोणी सोली देखाइएको छ । सो सोलीको आधारको सतह वृत्त आकारमा हुन्छ । सोलीको आधारको केन्द्रबाट आधारसँग लम्ब भई शीर्षविन्दु जोडिएको रेखालाई सोलीको अक्ष भनिन्छ । चित्रमा AB लाई सोलीको ठाडो उचाइ वा अक्ष भनिन्छ । त्यसै गरी AC लाई सोलीको छड्के उचाइ वा जेनेरेटर (generator) भनिन्छ । सोलीको ठाडो उचाइ वा अक्षसँग छड्के उचाइ वा जेनेरेटर (generator) ले बनाएको कोणलाई semivertical angle भनिन्छ । चित्रमा $\angle BAC = \alpha$ लाई semi-vertical angle भनिन्छ ।



चित्र (ङ)

Doubled mapped right circular cone को परिचय

बराबर दुईओटा समकोणी सोलीका शीर्षविन्दुहरूलाई जोड्यौँ भने कस्तो आकृति बन्छ होला, छलफल गर्नुहोस् । सँगै दिइएको चित्र (च) लाई अध्ययन गर्नुहोस् ।

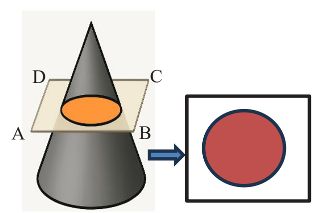

शीर्षविन्दु (vertex)

चित्र (च)

बराबर दुईओटा समकोणी सोलीका शीर्षविन्दुहरूलाई जोडी बनाइएको ठोस आकृति दिइएको छ । यसरी दोहोरो गरी शीर्षविन्दुतर्फ जोडिएका दुई सोलीलाई doubled mapped right circular cone भनिन्छ ।

वृत्त (Circle)

सँगै दिइएको चित्र (छ) लाई अध्ययन गर्नुहोस् । एउटा समतल सतह ABCD ले एउटा सोलीलाई कसरी काटेको छ ? यसरी काट्दा बन्ने आकार कुन ज्यामितीय आकारमा बनेको छ ? जुन आकारलाई सँगै चित्रमा देखाइएको छ । के यसरी काटेपछि बन्ने आकार वृत्त आकारमा छ, छलफल गर्नुहोस् ।



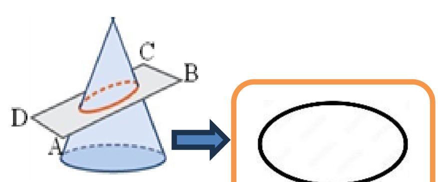
वृत्त (circle)

चित्र (छ)

अतः कुनै समतलीय सतहले सोलीको अक्षसँग 90° बनाई वा सोलीका आधारसँग समानान्तर भई सोलीलाई प्रतिच्छेदित गर्दा बन्ने आकृति वा समतलीय वक्र नै वृत्त (circle) हो ।

दीर्घवृत्त (Ellipse)

एउटा समतल सतह ABCD ले एउटा सोलीलाई कसरी काटेको छ ? सँगै दिइएको चित्र (ज) लाई अध्ययन गर्नुहोस् । यसरी काट्दा बन्ने आकार कुन ज्यामितीय आकारमा बनेको छ ? जुन आकारलाई सँगै चित्रमा देखाइएको छ । के काटेपछि बन्ने आकार दीर्घवृत्त आकारमा छ, छलफल गर्नुहोस् ।



दीर्घवृत्त (Ellipse)

चित्र (ज)

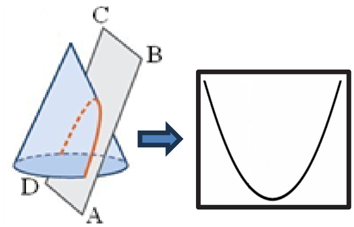
कुनै समतलीय सतहले सोलीको एउटा भागलाई काट्दा उक्त सतहले सोलीको अक्षसँग बनाएको कोण θ छ र उक्तकोण θ को मान यदि semi vertical angle (α) भन्दा ठुलो र $90°$ भन्दा सानो ($\alpha < \theta < 90°$) छ भने सो अवस्थामा सोली र सतहको प्रतिच्छेदनबाट बनेको समतलीय वक्र नै दीर्घवृत्त (ellipse) हो ।

दिइएको चित्र (ज) मा एउटा समतल सतह ABCD ले एउटा सोलीलाई काटी दीर्घवृत्त (ellipse)

बनेको छ । सो बनेको दीर्घवृत्त (ellipse) आकारलाई सँगैको चित्रमा देखाइएको छ ।

पाराबोला (parabola)

एउटा समतल सतह ABCD ले एउटा सोलीलाई कसरी काटेको छ ? सँगै दिइएको चित्र (झ) लाई अध्ययन गर्नुहोस् । यसरी काट्दा बन्ने आकार कुन ज्यामितीय आकारमा बनेको छ ? जुन आकारलाई सँगै चित्रमा देखाइएको छ । के काटेपछि बन्ने आकार पाराबोला आकारमा छ, छलफल गर्नुहोस् ।



पाराबोला (parabola)

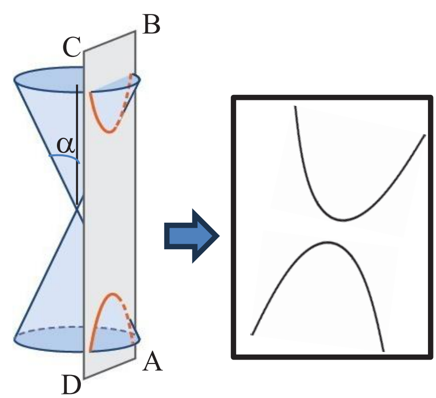
चित्र (झ)

कुनै समतलीय सतहले सोलीको एउटा भागलाई काट्दा (प्रतिच्छेदन गर्दा) उक्त समतलीय सतहले सोलीको अक्षसँग बनाएको कोण θ र semi vertical angle (α) बराबर ($\alpha = \theta$) भएको अवस्थामा अथवा generator सँग समतलीय सतह समानान्तर छ भने समतलीय सतह र सोलीको प्रतिच्छेदनबाट बनेको समतलीय वक्रलाई नै पाराबोला (parabola) भनिन्छ ।

दिइएको चित्र (झ) मा एउटा समतल सतह ABCD ले एउटा सोलीलाई काटी पाराबोला (parabola) बनेको छ । सो काटेर बन्ने पाराबोलाको आकारलाई सँगै चित्रमा देखाइएको छ ।

हाइपरबोला (Hyperbola)

एउटा समतल सतह ABCD ले दुईओटा सोली जोडेर बनाएको doubled mapped right circular cone लाई कसरी काटेको छ, सँगै दिइएको चित्र (ञ) लाई अध्ययन गर्नुहोस् । यसरी काट्दा बन्ने आकार कुन ज्यामितीय आकारमा बनेको छ ? जुन आकारलाई सँगै चित्रमा देखाइएको छ । के काटेपछि बन्ने आकार हाइपरबोला (hyperbola) आकारमा छ, छलफल गर्नुहोस् ।



हाइपरबोला (hyperbola)

चित्र (ञ)

चित्रमा समतलीय सतह ABCD ले सोलीको दुबै भागलाई काटेको छ । यसरी काटेको अवस्थामा समतलीय सतहले सोलीको अक्षसँग बनाएको कोण (θ), semi vertical angle (α) भन्दा सानो i.e. ($\theta < \alpha$) हुन्छ । सोलीको दुबै भाग र समतलीय सतहको प्रतिच्छेदनबाट बन्न गएको समतलीय वक्रलाई नै हाइपरबोला (hyperbola) भनिन्छ ।

दिइएको चित्र (ञ) मा एउटा समतल सतह ABCD ले सोलीको दुबै भागलाई काटी हाइपरबोला (hyperbola) बनेको छ । सो बनेको पाराबोलाको आकार सँगै चित्रमा देखाइएको छ । यसरी हाइपरबोला आकारको समतलीय वक्र बनाउन दुईओटा सोली जोड्नुपर्छ ।

अभ्यास 8.3

1. **दिइएका प्रश्नहरूको सही उत्तरमा (✓) चिह्न लगाउनुहोस् :**

(क) कुनै समतल सतहले एउटा सोलीलाई आधारसँग समानान्तर हुने गरी काट्दा कुन साङ्किक क्षेत्र बन्छ ?

a. पाराबोला (parabola) b. दीर्घवृत्त (ellipse)

c. वृत्त (circle) d. हाइपरबोला (hyperbola)

(ख) एउटा समतल सतहले सोलीको अक्षसँग लम्ब हुने गरी र सोलीको शीर्षविन्दुबाट नजाने गरी प्रतिच्छेदित गर्ने गरी बन्ने साङ्किक क्षेत्रलाई के भनिन्छ ?

a. पाराबोला (parabola) b. दीर्घवृत्त (ellipse)

c. वृत्त (circle) d. हाइपरबोला (hyperbola)

(ग) एउटा सतहले समकोणी सोलीलाई सोलीको अक्षसँग बनाएको कोण अर्धशीर्षकोणभन्दा सानो हुने गरी प्रतिच्छेदित गर्ने गरी बन्ने साङ्किक क्षेत्रलाई के भनिन्छ ?

a. पाराबोला (parabola) b. दीर्घवृत्त (ellipse)

c. वृत्त (circle) d. हाइपरबोला (hyperbola)

(घ) एउटा सोलीलाई समतलीय सतहले सोलीको जेनेरेटर (generator) सँग समानान्तर हुने गरी काट्दा बन्ने साङ्किक क्षेत्रलाई के भनिन्छ ?

a. पाराबोला (parabola) b. दीर्घवृत्त (ellipse)

c. वृत्त (circle) d. हाइपरबोला (hyperbola)

(ङ) सोलीको अर्धशीर्षकोण (semi vertical angle) α र सोलीको अक्षसँग समतल सतहले बनाएको कोण θ छ । यदि $\alpha < \theta < 90°$ भए समतलीय सतह र सोलीको प्रतिच्छेदनबाट बन्ने साङ्किक क्षेत्रलाई के भनिन्छ ?

a. पाराबोला (parabola) b. दीर्घवृत्त (ellipse)

c. वृत्त (circle) d. हाइपरबोला (hyperbola)

(च) सोलीको अर्धशीर्षकोण (semi vertical angle) α र सोलीको अक्षसँग समतल सतहले बनाएको कोण θ छ । यदि $\theta = \alpha$ भए समतलीय सतह र सोलीको प्रतिच्छेदनबाट बन्ने साङ्किक क्षेत्रलाई के भनिन्छ ?

a. पाराबोला (parabola) b. दीर्घवृत्त (ellipse)

c. वृत्त (circle) d. हाइपरबोला (hyperbola)

(छ) सोलीको अर्धशीर्षकोण (semi vertical angle) α र सोलीको अक्षसँग समतल सतहले बनाएको कोण θ छ । यदि $\theta < \alpha$ भए समतलीय सतह र सोलीको प्रतिच्छेदनबाट बन्ने

साङ्किक क्षेत्रलाई के भनिन्छ ?

a. पाराबोला (parabola) b. दीर्घवृत्त (ellipse)

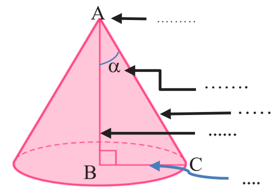
c. वृत्त (circle) d. हाइपरबोला (hyperbola)

(ज) दिइएका मध्ये कुन साङ्किक क्षेत्र होइन ?

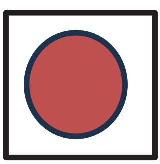
a. पाराबोला (parabola) b. दीर्घवृत्त (ellipse)

c. वृत्त (circle) d. सिधा रेखा (straight line)

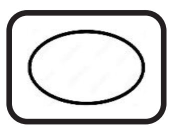
2. दिइएका सोलीमा विभिन्न भागहरूको नाम लेख्नुहोस् :



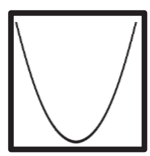
3. दिइएका ज्यामितीय आकृतिहरूको नाम लेख्नुहोस् :



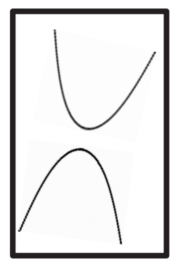
(क)



(ख)



(ग)



(घ)

4. दिइएका साङ्किक क्षेत्रलाई परिभाषित गर्नुहोस् :

(क) वृत्त (circle) (ख) दीर्घवृत्त (ellipse)

(ग) पाराबोला (parabola) (घ) हाइपरबोला (hyperbola)

5. दिइएका प्रश्नहरूको उत्तर दिनुहोस् :

(क) कुन अवस्थामा वृत्त बन्छ, लेख्नुहोस् ।

(ख) कुन अवस्थामा दीर्घवृत्त बन्छ, लेख्नुहोस् ।

(ग) कुन अवस्थामा पाराबोला बन्छ, लेख्नुहोस् ।

(घ) कुन अवस्थामा हाइपरबोला बन्छ, लेख्नुहोस् ।

उत्तर

1. (क) (d) (ख) (c) (ग) (c) (घ) (b)
(ङ) (a) (च) (b) (छ) (a) (ज) (d)

2. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

3. (क) वृत्त (ख) दीर्घवृत्त (ग) पाराबोला घ) हाइपरबोला

4. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

5. (क) $\theta = 90^\circ$ (ख) $\alpha < \theta < 90^\circ$ (ग) $\alpha = \theta$ घ) $\theta < \alpha$

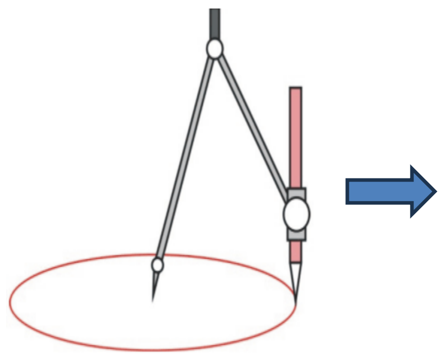
परियोजना कार्य

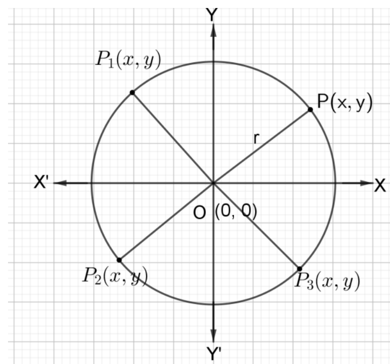
गिलो माटोलाई वा मुला, आलु, गाजर जस्ता कुनै ठोस वस्तु लिई ताछेर एउटा सोली आकार दिनुहोस् । ती ठोस वस्तुहरूलाई कसरी काट्नुभयो भने साङ्किक क्षेत्रहरू (वृत्त, दीर्घवृत्त, पाराबोला र हाइपरबोला) आकृतिहरू बन्छन् । यसरी काट्दा बन्ने सतह पहिचान गर्नुहोस् र सोको चित्र बनाउनुहोस् । फोटो खिच्नुहोस् र रिपोर्टमा राख्नुहोस् । यसलाई सामाग्रीसहित कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

8.4 वृत्त (Circle)

क्रियाकलाप 1

चित्रमा देखाइए जस्तै उद्गमविन्दु O (0, 0) केन्द्रविन्दु लिई कम्पास र पेन्सिलको प्रयोग गरी कागजमा एउटा वृत्त बनाउनुहोस् । सो वृत्तको परिधिमा एउटा विन्दु P (x, y) लिनुहोस् । अन्य विन्दुहरू $P_1 (x, y), P_2 (x, y), P_3 (x, y)$, ... जोड्नुहोस् । अब वृत्तको केन्द्रविन्दु O र P (x, y) जोड्नुहोस् ।





रेखा OP लाई सो वृत्तको अर्धव्यास भनिन्छ जसलाई r ले जनाइन्छ । अब O (0, 0) = (x_1, y_1) र P $(x, y) = (x_2, y_2)$ लिई दुरी सूत्रको प्रयोग गरी दिइएको तालिकामा खाली ठाउँ भर्नुहोस् :

1	$OP^2 = r^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$	$r^2 = (x - 0)^2 + (y - 0)^2$	$r^2 = x^2 + y^2$
2	$OP_1^2 = r^2 =$	....	....
3	$OP_2^2 = r^2 =$	....	....
4	$OP_3^2 = r^2 =$	....	....

(क) के OP^2, OP_1^2, OP_2^2 र OP_3^2 ले दिने नतिजा एउटै हुन्छ, छलफल गर्नुहोस् ।

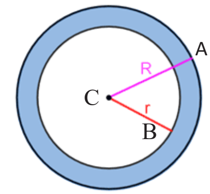
उल्लिखित तालिकाबाट प्राप्त हुने सम्बन्ध $x^2 + y^2 = r^2$ लाई केन्द्र उद्गम विन्दु (0, 0) र अर्धव्यास (r) भएका वृत्तको समीकरण भनिन्छ ।

(ख) चित्रमा OP, OP_1, OP_2, र OP_3 को लम्बाइ मापन गर्नुहोस् । तिनीहरूको लम्बाइ कति कति छन्, लेख्नुहोस् । के तिनीहरूको लम्बाइ बराबर छ ?

....

क्रियाकलाप 2

चित्रमा दिइए जस्तै एउटै केन्द्रविन्दु (C) भएका दुईओटा फरक फरक अर्धव्यासका वृत्त बनाउनुहोस् । चित्रमा देखाइए जस्तै नामकरण गर्नुहोस् । यसमा भित्री वृत्तको अर्धव्यास (BC) = r र बाहिरी वृत्तको अर्धव्यास (AC) = R मान्नुहोस् ।



BC को लम्बाइ (r) = ...	AC को लम्बाइ (R) = ...

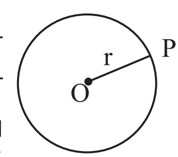
र r र R को लम्बाइ मापन गर्नुहोस् । तिनीहरूलाई र तुलना गर्नुहोस् । कुन कतिले बढी छ, लेख्नुहोस् ।

यसरी एउटै केन्द्रविन्दु तर फरक अर्धव्यास भएका दुई वृत्तलाई एक केन्द्रित वृत्त (concentric circles) भनिन्छ । यसरी नै तीनओटा केन्द्रित वृत्त बनाई तिनीहरूका अर्धव्यासहरू तुलना गर्नुहोस् ।

साङ्किक क्षेत्र (Conic section) का आधारमा

एउटा सामकोणी सोलीलाई कुनै समतल सतहले आधारसँग समानान्तर हुने गरी काट्दा बनेको आकृतिलाई पनि वृत्त भनिन्छ ।

विन्दुपथ (Locus) का आधारमा : निश्चित विन्दुबाट बराबर दुरीमा चल्ने विन्दुको विन्दुपथ नै वृत्त हो । त्यो निश्चित विन्दु वृत्तको केन्द्र हो भने बराबर दुरी वृत्तको अर्धव्यास हो । सँगै दिइएको वृत्तमा O वृत्तको केन्द्रविन्दु हो । P परिधिमा भएको विन्दु हो । विन्दु O देखि विन्दु P सम्मको दुरीलाई सो वृत्तको अर्धव्यास भनिन्छ । अर्धव्यासलाई r ले जनाइन्छ । अत: चित्रमा अर्धव्यास (OP) = r हुन्छ ।



8.4.1 वृत्तको समीकरण (Equation of Circle)

(क) केन्द्र उद्गमविन्दु (0, 0) र अर्धव्यास (r) भएका वृत्तको समीकरण

सँगै दिइएको चित्रमा उद्गमविन्दु O (0, 0) वृत्तको केन्द्रविन्दु हो । परिधिमा एउटा विन्दु P (x, y) लिउँ । वृत्तको केन्द्रविन्दु O देखि परिधिको विन्दु P (x, y) सम्मको दुरी OP लाई वृत्तको अर्धव्यास भनिन्छ । जहाँ OP = r हुन्छ ।

मानौँ $O(0, 0) = (x_1, y_1)$ र $P(x, y) = (x_2, y_2)$

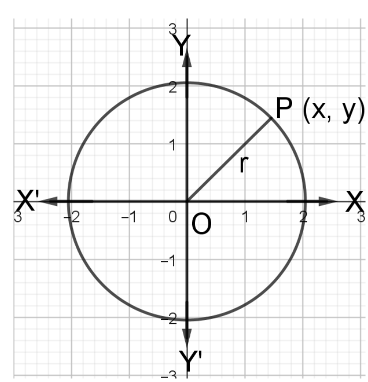
अब, दुरी सूत्रअनुसार,

$OP = d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

अथवा, $r = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2}$

अथवा, $r = \sqrt{(x)^2 + (y)^2}$

अथवा, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

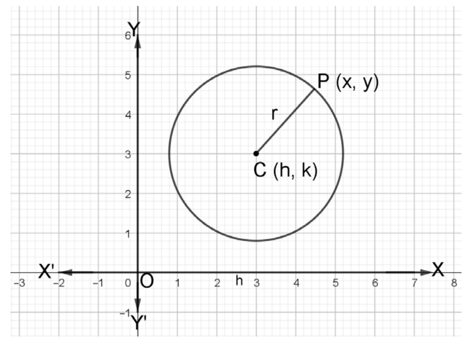


दुबैतर्फ वर्ग गर्दा, $x^2 + y^2 = r^2$

अतः केन्द्र उद्‌गमविन्दु (0, 0) र अर्धव्यास (r) भएका वृत्तको समीकरण, $x^2 + y^2 = r^2$ हुन्छ ।

(ख) केन्द्र (h, k) र अर्धव्यास (r) भएका वृत्तको समीकरण

सँगै दिइएको चित्रमा, विन्दु C (h, k) वृत्तको केन्द्रविन्दु हो । परिधिमा एउटा विन्दु P (x, y) लिऔँ । वृत्तको केन्द्रविन्दु C देखि परिधिको विन्दु P (x, y) सम्मको दुरी CP लाई वृत्तको अर्धव्यास भनिन्छ जहाँ CP = r हुन्छ ।



अब, मानौँ C (h, k) = (x_1, y_1)

P (x, y) = (x_2, y_2)

अब, दुरी सूत्रअनुसार, $CP^2 = r^2$

अथवा, $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = r^2$

अथवा, $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

अतः केन्द्र (h, k) र अर्धव्यास (r) भएका वृत्तको समीकरण, $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ हुन्छ ।

(ग) व्यासको छेउका विन्दुहरू (x_1, y_1) र (x_2, y_2) भएको वृत्तको समीकरण

सँगैको चित्रमा विन्दु C वृत्तको केन्द्रविन्दु हो । व्यास AB का छेउका विन्दुहरू A (x_1, y_1) र B (x_2, y_2) छन् । परिधिमा एउटा विन्दु P (x, y) लिऔँ । P, A र P, B जोडौँ ।

$\angle APB$ अर्धवृत्तको परिधिमा बनेको कोण हो, त्यसैले $\angle APB = 90°$ हुन्छ ।

अब, रेखा AP को झुकावका लागि, मानौँ,

A (x_1, y_1) = (x_1, y_1)

P (x, y) = (x_2, y_2)

सूत्रअनुसार, AP को झुकाव $(m_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$

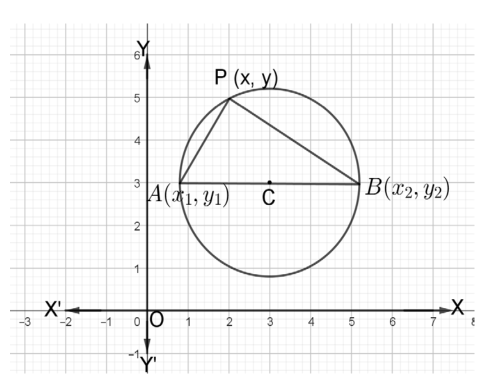
त्यसै गरी, BP को झुकाव $(m_2) = \frac{y - y_2}{x - x_2}$

हामीलाई थाहा छ, AP र BP एकआपसमा लम्ब भएकाले,

$m_1 \times m_2 = -1$ हुन्छ

अथवा, $\frac{y - y_1}{x - x_1} \times \frac{y - y_2}{x - x_2} = -1$

अथवा, $\frac{(y - y_1)(y - y_2)}{(x - x_1)(x - x_2)} = -1$



अथवा, $(y - y_1)\ (y - y_2) = -(x - x_1)\ (x - x_2)$

अथवा, $(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$

अतः व्यासको छेउका विन्दुहरू (x_1, y_1) र (x_2, y_2) भएको वृत्तको समीकरण

$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$ हुन्छ ।

(घ) साधारण स्वरूपमा वृत्तको समीकरण

केन्द्र (h, k) र अर्धव्यास (r) भएका वृत्तको समीकरण, $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ हुन्छ ।

अथवा, $x^2 - 2xh + h^2 + y^2 - 2yk + k^2 = r^2$

अथवा, $x^2 + y^2 + 2(-h)x + 2(-k)y + h^2 + k^2 - r^2 = 0$

अथवा, $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ लाई वृत्तको साधारण स्वरूपको समीकरण भनिन्छ ।

जहाँ, $g = (-h), f = (-k)$ र $c = h^2 + k^2 - r^2$ छ ।

जहाँ, $h = -g, k = -f$ र $r^2 = h^2 + k^2 - c, r = \sqrt{h^2 + k^2 - c}$ हुन्छ ।

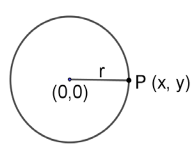
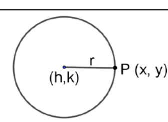
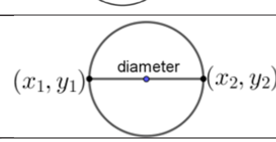
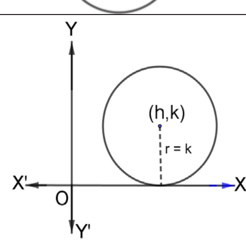
अतः वृत्तको केन्द्रविन्दु (h, k) = (–g, –f) र अर्धव्यास $(r) = \sqrt{h^2 + k^2 - c}$

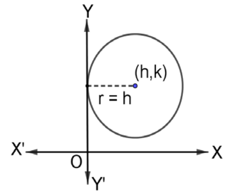
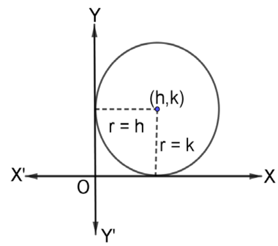
साधारण स्वरूपको समीकरण $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ सँग दिइएका विशेषता हुन्छन् ।

(क) यसमा x र y मा डिग्री 2 छ ।

(ख) x^2 को गुणाङ्क = y^2 को गुणाङ्क हुन्छ ।

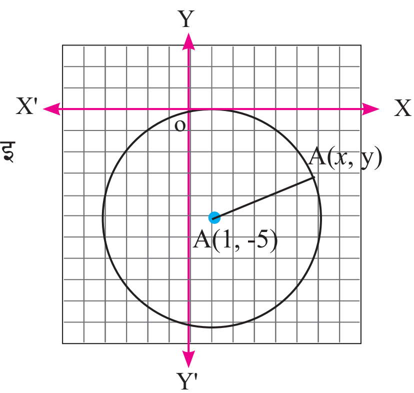
आवश्यक तथ्यहरू

क्र.स.	वृत्तको अवस्था	चित्र	वृत्तको समीकरण
1	वृत्तको केन्द्र उद्गम विन्दु (0, 0) हुँदा		$x^2 + y^2 = r^2$
2	वृत्तको केन्द्र विन्दु (h, k) हुँदा		$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$
3	व्यासका दुई छेउका विन्दु दिँदा		$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)$ $(y - y_2) = 0$
4	वृत्तले X– अक्षलाई छुँदा $(r = k)$		$(x - h)^2 + (y - k)^2 = k^2$ अथवा $(x - h)^2 + (y - r)^2 = r^2$

5	वृत्तले Y– अक्षलाई छुँदा $(r = h)$		$(x-h)^2 + (y-k)^2 = h^2$ अथवा $(x-r)^2 + (y-k)^2 = r^2$
6	वृत्तले दुवै अक्षलाई छुँदा $(r = h = \mathrm{k})$		$(x-h)^2 + (y-h)^2 = h^2$ अथवा $(x-k)^2 + (y-k)^2 = k^2$ अथवा $(x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2$

उदाहरण 1

केन्द्रविन्दु $(1, -5)$ र अर्धव्यास 4 एकाइ भएको वृत्तको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।



समाधान : यहाँ,

वृत्तको केन्द्रविन्दु $(h, k) = (1, -5)$ र अर्धव्यास $(\mathrm{r}) = 4$ एकाइ

सूत्रअनुसार, वृत्तको समीकरण, $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

अथवा, $(x-1)^2 + (y+5)^2 = (4)^2$

अथवा, $x^2 - 2.\,x.\,1 + (1)^2 + y^2 - 2.\,y.\,5 + (5)^2 = 16$

अथवा, $x^2 - 2x + 1 + y^2 - 10y + 25 = 16$

अथवा, $x^2 + y^2 - 2x - 10y + 1 + 25 - 16 = 0$

अथवा, $x^2 + y^2 - 2x - 10y + 10 = 0$ आवश्यक वृत्तको समीकरण हो ।

उदाहरण 2

कुनै वृत्तको व्यासका छेउछेउका विन्दुहरू $(2, -4)$ र $(-3, 7)$ छन् भने सो वृत्तको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

दिइएका वृत्तको व्यासका छेउछेउका विन्दुहरूलाई,

मानौँ, $(2, -4) = (x_1, y_1)$ र $(-3, 7) = (x_2, y_2)$

व्यासको छेउका विन्दुहरू (x_1, y_1) र (x_2, y_2) भएको वृत्तको समीकरण

अथवा, $(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$

अथवा, $(x-2)(x+3)+(y+4)(y-7)=0$

अथवा, $x(x+3)-2(x+3)+y(y-7)+4(y-7)=0$

अथवा, $x^2+3x-2x-6+y^2-7y+4y-28=0$

अथवा, $x^2+y^2+x-3y-34=0$ आवश्यक वृत्तको समीकरण हो ।

उदाहरण 3

एउटा वृत्तको समीकरण $9x^2+9y^2-36x+6y-107=0$ भए सो वृत्तको केन्द्रको निर्देशाङ्क र व्यास पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

दिइएको वृत्तको समीकरण $9x^2+9y^2-36x+6y-107=0$

केन्द्रको निर्देशाङ्क $(h, k)=?$ र व्यास $(d)=?$

दिइएको समीकरणलाई दुवैतर्फ 9 ले भाग गर्दा

$x^2+y^2-4x+\frac{2}{3}y-\frac{107}{9}=0$ ....(i) (**विचारणीय प्रश्न :** किन दुबैतर्फ 9 ले भाग गर्नुपर्छ ?)

समीकरण, (i) लाई साधारण स्वरूपको समीकरण $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ सँग तुलना गर्दा

$2g=-4$ अथवा, $g=-2$

$2f=\frac{2}{3}$ अथवा $f=\frac{1}{3}$ र $c=-\frac{107}{9}$

सूत्रअनुसार, केन्द्र $(h, k)=(-g, -f)=\left(2,-\frac{1}{3}\right)$

अर्धव्यास $(r)=\sqrt{h^2+k^2-c}$

$$=\sqrt{(2)^2+\left(-\frac{1}{3}\right)^2-\left(-\frac{107}{9}\right)}$$

$$=\sqrt{4+\frac{1}{9}+\frac{107}{9}}$$

$$=\sqrt{\frac{36+1+107}{9}}=\sqrt{\frac{144}{9}}=\sqrt{16}=4$$

व्यास $(d)=2r=2\times4=8$ एकाइ

अतः केन्द्रको निर्देशाङ्क $(h, k)=\left(2,-\frac{1}{3}\right)$ र व्यास $(d)=8$ एकाइ हुन्छ ।

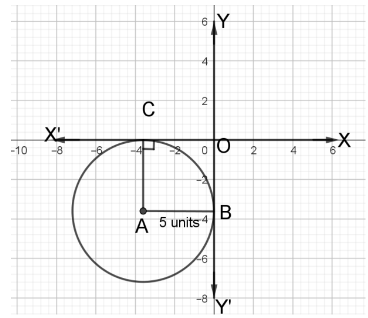
उदाहरण 4

पूर्ण रूपमा तेस्रो चतुर्थांशमा पर्ने, दुबै अक्षमा छुने अर्धव्यास 5 एकाइ भएको वृत्तको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

अर्धव्यास (r) = 5 एकाइ

पूर्ण रूपमा तेस्रो चतुर्थांशमा पर्ने र दुबै अक्षमा छुने वृत्त भएकाले,



केन्द्रविन्दुको निर्देशाङ्क $(h, k) = (-r, -r) = (-5, -5)$

सूत्रअनुसार, वृत्तको समीकरण, $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

अथवा, $(x+5)^2 + (y+5)^2 = (5)^2$

अथवा, $x^2 + 2.x.5 + (5)^2 + y^2 + 2.y.5 + (5)^2 = 25$

अथवा, $x^2 + 10x + 25 + y^2 + 10y + 25 = 25$

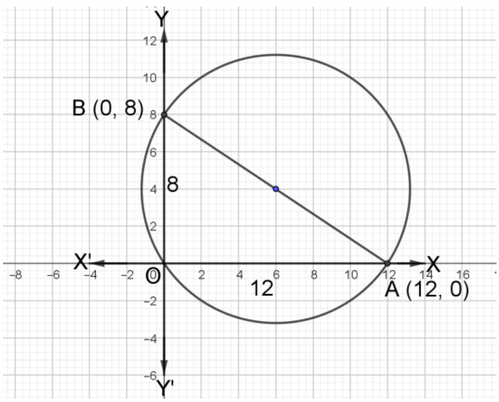
अथवा, $x^2 + y^2 + 10x + 10y + 25 = 0$

अतः, $x^2 + y^2 + 10x + 10y + 25 = 0$ आवश्यक वृत्तको समीकरण हो ।

उदाहरण 5

उद्गमविन्दु भएर जाने, x - खण्ड 12 एकाइ र y - खण्ड 8 एकाइ भएको वृत्तको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ,



x – खण्ड = 12 एकाइ, y – खण्ड = 8 एकाइ छ ।

वृत्त उद्गमविन्दु भएर जान्छ ।

चित्रबाट, $\angle YOX = 90°$

($\because$ X - अक्ष र Y - अक्ष बिचको कोण हुने भएकाले)

त्यसैले AB वृत्तको व्यास हो,

जहाँ A (12, 0) र B (0, 8) छन् ।

मानौँ, $A(12, 0) = (x_1, y_1)$ र $B(0, 8) = (x_2, y_2)$

हामीलाई थाहा छ, व्यासको छेउका विन्दुहरू भएको वृत्तको समीकरण,

$(x-x_1)(x-x_2) + (y-y_1)(y-y_2) = 0$

अथवा, $(x-12)(x-0) + (y-0)(y-8) = 0$

अथवा, $(x-12)x + y(y-8) = 0$

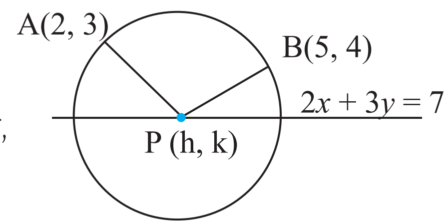
अथवा, $x^2 - 12x + y^2 - 8y = 0$

अथवा, $x^2 + y^2 - 12x - 8y = 0$ आवश्यक वृत्तको समीकरण हो ।

उदाहरण 6

विन्दुहरू A (2, 3) र B (5, 4) भएर जाने तथा केन्द्रविन्दु सिधा रेखा $2x + 3y = 7$ मा पर्ने वृत्तको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ,



मानौँ, वृत्तको केन्द्रविन्दु (h, k) र अर्धव्यास r छ ।

केन्द्रविन्दु (h, k) सिधा रेखा $2x + 3y = 7$ मा पर्छ त्यसैले,

अथवा, $2h + 3k = 7$

अथवा, $h = \frac{7-3k}{2}$ ....(i)

फेरि विन्दुहरू (2, 3) र (5, 4) वृत्तको परिधिमा छन् । त्यसैले PA = PB ($\because$ एउटै वृत्तको अर्धव्यास भएकाले)

अथवा, $PA^2 = PB^2$

अथवा, $(h-2)^2 + (k-3)^2 = (h-5)^2 + (k-4)^2$

अथवा, $h^2 - 4h + 4 + k^2 - 6k + 9 = h^2 - 10h + 25 + k^2 - 8k + 16$

अथवा, $13 - 4h - 6k = 41 - 10h - 8k$

अथवा, $10h - 4h = 6k - 8k + 41 - 13$

अथवा, $6h = -2k + 28$

अथवा, $6\left(\frac{7-3k}{2}\right) = -2k + 28$

अथवा, $3(7-3k) = -2k + 28$

अथवा, $21 - 9k = -2k + 28$

अथवा, $21 - 28 = 9k - 2k$

अथवा, $7k = -7$

अथवा, $k = -1$

समीकरण (i) बाट $h = \frac{7-3\times(-1)}{2} = 5$

फेरि, $PA^2 = r^2 = (5-2)^2 + (-1-3)^2$

अथवा, $r^2 = 9 + 16 = 25$

$\therefore$ r = 5 एकाइ

अब वृत्तको समीकरण, $(x-5)^2 + (y+1)^2 = 5^2$

अथवा, $x^2 - 10x + 25 + y^2 + 2y + 1 = 25$

अथवा, $x^2 + y^2 - 10x + 2y + 1 = 0$ आवश्यक वृत्तको समीकरण हो ।

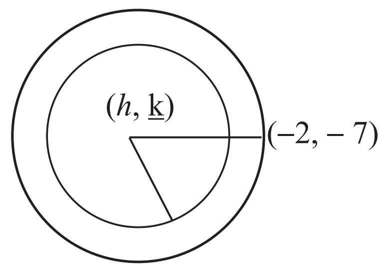
उदाहरण 7

वृत्त $x^2 + y^2 - 8x + 6y - 5 = 0$ सँग एक केन्द्रित हुने र विन्दु $(-2, -7)$ भएर जाने वृत्तको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

दिइएको समीकरण, $x^2 + y^2 - 8x + 6y - 5 = 0$..........(i)

र विन्दु $(-2, -7)$ छन् ।



समीकरण (i) लाई साधारण स्वरूपको समीकरण

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ सँग तुलना गर्दा

$2g = -8, 2f = 6$ र $c = -5$

$g = -4, f = 3$ र $c = -5$

सूत्रअनुसार, केन्द्रविन्दु $(h, k) = (-g, -f) = (4, -3)$

मानौं, $(4, -3) = (x_1, y_1)$ र $(-2, -7) = (x_2, y_2)$

दुरी सूत्रअनुसार, $r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$r = \sqrt{(-2 - 4)^2 + (-7 + 3)^2}$

$r = \sqrt{(-6)^2 + (-4)^2}$

$r = \sqrt{36 + 16}$

$r = \sqrt{52}$

$r = 2\sqrt{13}$ एकाइ

अब वृत्तको समीकरण, $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

अथवा, $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = \left(2\sqrt{13}\right)^2$

अथवा, $x^2 - 8x + 16 + y^2 + 6y + 9 = 52$

अथवा, $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 25 - 52 = 0$

अथवा, $x^2 + y^2 - 8x + 6y - 27 = 0$ आवश्यक वृत्तको समीकरण हो ।

अभ्यास 8.4

1. दिइएका प्रश्नहरूको उपयुक्त विकल्पमा ठिक चिह्न (✓) लगाउनुहोस् :

(क) दिइएका समीकरणहरूमध्ये केन्द्रविन्दु (0, 0) र अर्धव्यास 10 एकाइ कुन समीकरणले जनाउँछ ।

a. $x^2 - y^2 = 10$ b. $x^2 + y^2 = 10$

c. $x^2 - y^2 = 100$ d. $x^2 + y^2 = 100$

(ख) दिइएका कुन विन्दुहरू वृत्तको समीकरण $(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 18$ मा पर्छन् ।

a. (0, 0) b. (1, 0) c. (2, 1) d. (0, 2)

(ग) केन्द्रविन्दु (0, 0) भएको वृत्त, विन्दु (–8, –15) भएर जान्छ भने सो वृत्तको अर्धव्यास कति हुन्छ ?

a. 8 एकाइ b. 15 एकाइ c. 17 एकाइ d. 21 एकाइ

(घ) समीकरण $x^2 + y^2 - 4x - 8y - 45 = 0$ भएको वृत्तको केन्द्रविन्दु र अर्धव्यास तलका मध्ये कुन हुन्छ ?

a. केन्द्रविन्दु (2, 4) र अर्धव्यास 5 एकाइ b. केन्द्रविन्दु (4, 8) र अर्धव्यास 65 एकाइ

c. केन्द्रविन्दु (4, 8) र अर्धव्यास $\sqrt{65}$ एकाइ d. केन्द्रविन्दु (2, 4) र अर्धव्यास $\sqrt{65}$ एकाइ

(ङ) केन्द्रविन्दु (1, –2) र अर्धव्यास 4 एकाइ भएको वृत्तको समीकरण..........हो ।

a. $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 4^2$ b. $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 4^2$

c. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4^2$ d. $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4^2$

2. **दिइएका केन्द्रविन्दु र अर्धव्यास भएका वृत्तको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् :**

	केन्द्र (h, k)	अर्धव्यास (r)		केन्द्र (h, k)	अर्धव्यास (r)
(क)	(–4, 1)	4 एकाइ	(घ)	(0, 10)	5 एकाइ
(ख)	(–3, –4)	7 एकाइ	(ङ)	$(-a, -a)$	$a\sqrt{2}$ एकाइ
(ग)	(2, –1)	3 एकाइ	(च)	(a, b)	b एकाइ

3. **दिइएका वृत्तको समीकरणहरूबाट केन्द्रको निर्देशाङ्क र अर्धव्यास पत्ता लगाउनुहोस् :**

(क) $x^2 + y^2 = 25$ (ख) $(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 36$

(ग) $(x - 0)^2 + (y + 2)^2 = 36$ (घ) $x^2 + y^2 - 2y = 24$

(ङ) $x^2 + y^2 - 10x + 4y + 13 = 0$ (च) $x^2 + y^2 + 6x - 8y - 11 = 0$

(छ) $2x^2 + 2y^2 - 8x - 12y + 1 = 0$ (ज) $9x^2 + 9y^2 - 36x + 6y - 107 = 0$

4. **दिइएका विन्दुहरू वृत्तका व्यासको छेउछेउका विन्दुहरू हुन् भने सो वृत्तका समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् :**

(क) $(a, -1)$ र $(-a, 2)$ (ख) (2, –6) र (3, –7) (ग) (0, –7) र (–3, 2)

5. वृत्तको समीकरण $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ छ भने,

(क) केन्द्रविन्दुको निर्देशाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) एउटा व्यासको एउटा छेउको विन्दुको निर्देशाङ्क (5, 3) भए अर्को छेउको निर्देशाङ्कहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

6. एउटा वृत्तको समीकरण $x^2 + y^2 - 6x - 8y - 11 = 0$ छ ।

(क) वृत्तको केन्द्रविन्दुको निर्देशाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) सो वृत्तको अर्धव्यास पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) यदि सो वृत्तको एउटा व्यासको एउटा छेउको विन्दुको निर्देशाङ्क (–2, –3) भए अर्को छेउको निर्देशाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

7. एउटा वृत्तको समीकरण $3x^2 + 3y^2 + 6x - 3y + 3 = 0$ छ ।

(क) वृत्तको केन्द्रविन्दुको निर्देशाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) सो वृत्तको अर्धव्यास पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) यदि सो वृत्तको एउटा व्यासको एकछेउ (5, 3) भए अर्को छेउको निर्देशाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

8. दिइएको अवस्थामा वृत्तको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) पूर्ण रूपमा तेस्रो चतुर्थांशमा पर्ने, दुबै अक्षमा छुने र अर्धव्यास 5 एकाइ भएको

(ख) पूर्ण रूपमा चौथो चतुर्थांशमा पर्ने, दुबै अक्षमा छुने र अर्धव्यास 6 एकाइ भएको

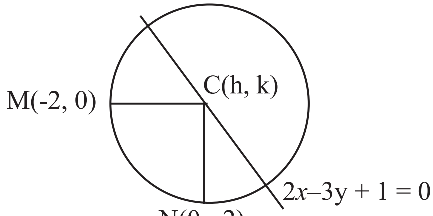
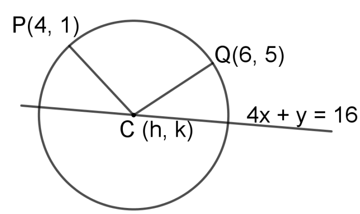
9. **दिइएको अवस्थामा वृत्तको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् :**

(क) x- खण्ड 4 एकाइ, y- खण्ड 6 एकाइ र उद्गमविन्दु भएर जाने

(ख) x- खण्ड 5 एकाइ, y- खण्ड 10 एकाइ र उद्गमविन्दु भएर जाने

(ग) x- खण्ड 12 एकाइ, y- खण्ड 8 एकाइ र उद्गमविन्दु भएर जाने

10. दिइएको अवस्थामा वृत्तको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् :

<table>
<tr>
<td>(क)

</td>
<td>(ख)

</td>
</tr>
<tr>
<td>चित्रमा दिइएको वृत्त दुईओटा विन्दु M (–2, 0) र N (0, –2) भएर जान्छ र यसको केन्द्र C (h, k) रेखा $2x - 3y + 1$ मा पर्छ ।</td>
<td>चित्रमा दिइएको वृत्त दुईओटा विन्दु P (4, 1) र Q (6, 5) भएर जान्छ र यसको केन्द्र C (h, k) रेखा $4x + y = 16$ मा पर्छ ।</td>
</tr>
</table>

11. दिइएका विन्दुहरू भएर जाने वृत्तको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) (0, 0), (4, 0) र (0, 2)   (ख) (0, 0), (5, 0) र (0, 5)

12. वृत्त $x^2 + y^2 - 8x + 4 = 0$ सँग एक केन्द्रित हुने र विन्दु (4, 2) भएर जाने वृत्तको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

13. केन्द्र (–1, 2) भएको र समीकरण $x^2 + y^2 - 6x - 10y - 2 = 0$ भएको वृत्तको केन्द्रविन्दु भएर जाने वृत्तको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

15. विद्यालयको खेल मैदानका बिचमा एउटा वृत्ताकार फूलबारी बनाइएको छ । फूलबारीको केन्द्रलाई निर्देशाङ्क प्रणालीमा (2, –1) मानिएको छ र यसको अर्धव्यास 7 मिटर छ ।

(क) उक्त फूलबारीको किनारालाई प्रतिनिधित्व गर्ने वृत्तको समीकरण लेख्नुहोस् ।

(ख) यदि अर्को विद्यार्थी (8, –1) विन्दुमा उभिएको छ भने के ऊ फूलबारीको भित्र, बाहिर वा ठिक किनारामा छ, कारणसहित व्याख्या गर्नुहोस् ।

उत्तर

1. (क) (d) (ख) (c) (ग) (c) (घ) (d) (ङ) (d)

2. (क) $x^2 + y^2 + 8x - 2y + 1 = 0$ (ख) $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 90 = 0$ (ग) $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$
(घ) $x^2 + y^2 - 20y + 75 = 0$ (ङ) $x^2 + y^2 + 2ax + 2ay + (2a^2 - 9) = 0$ (च) $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 = 0$

3. (क) (0,0), 5 (ख) (0,0), 6 (ग) (0,–2), 6 (घ) (0,1), 5 (ङ) (5,–2), 4 (च) (–3, 4), 6
(छ) (2, 3), $\frac{5}{\sqrt{2}}$ (ज) $(2, \frac{-1}{3})$, 4

4. (क) $x^2 + y^2 - y - a^2 - 9) = 0$ (ख) $x^2 + y^2 - 5x + 13y + 36 = 0$
(ग) $x^2 + y^2 + 3x + 5y - 14 = 0$

5. (क) (2, –3) (ख) (–1, –9)   6. (क) (3, 4) (ख) 6 एकाइ (ग) (8, 11)

7. (क) $(-1, \frac{1}{2})$ (ख) $\frac{1}{2}$ एकाइ (ग) (–7, 2)

8. (क) $x^2 + y^2 - 10x + 10y + 25 = 0$ (ख) $x^2 + y^2 - 12x + 12y + 36 = 0$

9. (क) $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 0$ (ख) $x^2 + y^2 - 5x - 10y = 0$ (ग) $x^2 + y^2 - 12x - 8y = 0$

10. (क) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 8 = 0$ (ख) $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 15 = 0$

11 (क) $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$ (ख) $x^2 + y^2 - 5x - 5y = 0$

12. $x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0$ 13. $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$

14. (क) $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 44 = 0$ (ख) भित्र

परियोजना कार्य

दैनिक जीवनमा वृत्तका समीकरणहरूको उपयोग कहाँ भएको पाइन्छ, अग्रजहरू वा शिक्षकहरूसँग सोधखोज वा इन्टरनेटको सहयोग लिई प्रतिवेदन तयार पार्नुहोस् र कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

पाठ 9

स्थानान्तरण (Transformation)

9.1 परिचय (Introduction)


Felix Klein (1849-1925)

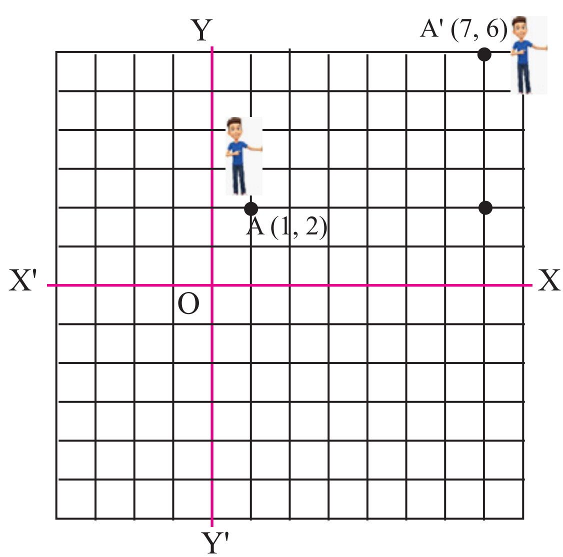
निश्चित नियमका आधारमा कुनै स्थानमा रहेको वस्तुको स्थान परिवर्तन गर्नुलाई स्थानान्तरण भनिन्छ । इजिप्टको अलेक्जान्डियामा लगभग 325 इसापूर्व जन्मिएका ग्रिक गणितज्ञ युक्लिडले आफ्नो पुस्तक The Elements मा ज्यामितिलाई व्यवस्थित रूपमा परिभाषित गरी स्वयम्सिद्ध तथ्य र प्रमाणहरूको प्रयोग गरेको पाइन्छ ।

युक्लिडले प्रत्यक्ष रूपमा स्थानान्तरणको विकास नगरे पनि ज्यामितिमा उनले गरेको कार्यले जर्मन गणितज्ञ Felix Klein लाई स्थानान्तरणको अन्वेषण गर्न आवश्यक आधार र प्रेरणा प्रदान गर्‍यो । उनले 19 औँ शताब्दीको अन्त्यतिर आफ्नो Erlangen कार्यक्रममार्फत ज्यामितिको जगका रूपमा स्थानान्तरणको व्यवस्थित रूपमा प्रयोग गरेको पाइन्छ । स्थानान्तरणको प्रयोग गणितमा विशेष रूपमा ज्यामिति, क्याल्कुलस र रेखीय बीजगणितमा भएको पाइन्छ । त्यस्तै स्थानान्तरणको प्रयोग कम्प्युटर विज्ञान, भौतिक विज्ञान, इन्जिनियरिङ र सङ्गीत आदिमा गरिन्छ ।

9.2 ज्यामितिय आकृतिको विस्थापन (Translation of Geometrical Shapes)

क्रियाकलाप 1

दिइएको ग्राफमा, एक जना मानिस विन्दु A (1, 2) मा उभिएका छन् । उनी उभिएको स्थान A बाट सिधा दायाँ विन्दु B मा पुग्छन् र सो विन्दुबाट सिधा माथि गएपछि विन्दु A' (7, 6) मा पुग्छन् । यस अवस्थामा तलका प्रश्नहरूमा छलफल गर्नुहोस् :



(क) विन्दु A (1, 2) बाट कति एकाइ दायाँ र कति एकाइ माथि हिँडेपछि विन्दु A' (7, 6) सम्म पुग्छन् ?

(ख) दायाँ र माथि विस्थापन गरिएका जोडा सङ्ख्यालाई कसरी जनाउन सकिन्छ ?

(ग) विन्दु A (1, 2), जोडा सङ्ख्या र विन्दु A' (7, 6) बिचको सम्बन्ध कसरी देखाउन सकिन्छ ?

विन्दु A (1, 2) लाई 6 एकाइ दायाँ र 4 एकाइ माथि विस्थापन गरेपछि A' (7, 6) मा पुग्छ । यहाँ 6 एकाइ दायाँ भन्नाले धनात्मक X- अक्षतिर र 4 एकाइमाथि भन्नाले धनात्मक Y- अक्षतिर भन्ने बुझिन्छ । यसलाई जोडा सङ्ख्या $\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$ अथवा (6, 4) ले जनाउन सकिन्छ । यसलाई विस्थापन भेक्टर भनिन्छ । विन्दु A (1, 2), जोडा सङ्ख्या र विन्दु A'(7, 6) बिचको सम्बन्ध यसरी देखाउन सकिन्छ :

$$A\,(1, 2) \xrightarrow{\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}} A'\,(1+6,\ 2+4) = A'\,(7, 6)$$

यसरी विस्थापन भेक्टर $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ ले विन्दु P (x, y) लाई विन्दु P' $(x + a, y + b)$ मा विस्थापन गर्छ ।

अर्थात्, $P\,(x, y) \xrightarrow{\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}} P'(x + a,\ y + b)$ हुन्छ ।

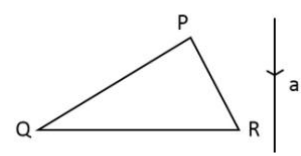
विचारणीय प्रश्न : यदि उक्त मानिस विन्दु A(1, 2) बाट 6 एकाइ बायाँ र 4 एकाइ तल हिँडेपछि पुग्ने विन्दु A' भए त्यस A' को निर्देशाङ्कहरू कति हुन्छन्, छलफल गरी लेख्नुहोस् ।

क्रियाकलाप 2

निम्नलिखित प्रश्नहरू साथीहरूबिच छलफल गरी उत्तर कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् :

(क) ΔPQR लाई दिइएको भेक्टर $\vec{a}$ को दिशा र परिमाणमा विस्थापन गर्दा कहाँ पुग्छ ?

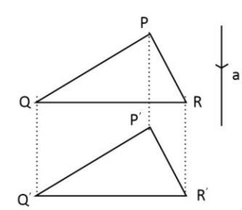
(ख) के ΔPQR र विस्थापन पछि प्राप्त प्रतिबिम्बअनुरूप हुन्छन् ?



यहाँ,

(क) विन्दुहरू P, Q र R लाई set square को प्रयोग गरी $\vec{a}$ सँग बराबर र समानान्तर हुने गरी क्रमशः $\overrightarrow{PP'}$, $\overrightarrow{QQ'}$ र $\overrightarrow{RR'}$ खिचेर विन्दुहरू P', Q' र R' जोड्दा ΔP'Q'R' बन्छ जुन ΔPQR को विस्थापित प्रतिबिम्ब हो ।

(ख) ΔPQR र विस्थापित प्रतिबिम्ब ΔP'Q'R' अनुरूप छन् ।



कुनै पनि विन्दु वा वस्तुलाई दिइएको दिशामा निश्चित दुरीमा स्थानान्तरण गर्नुलाई विस्थापन (translation) भनिन्छ । विस्थापनका लागि यसको परिमाण र दिशा उल्लेख गर्नु आवश्यक हुन्छ । त्यसैले विस्थापन एउटा भेक्टर हो । कुनै निर्देशाङ्कलाई दायाँ विस्थापन गर्दा (+), बायाँ विस्थापन गर्दा (–), माथि विस्थापन गर्दा (+) र तल विस्थापन गर्दा (–) लेखिन्छ ।

उदाहरण 1

विन्दुहरू A (3, 1) र B (–4, 2) लाई विस्थापन भेक्टर $T = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ ले विस्थापन गर्दा आउने प्रतिबिम्बका निर्देशाङ्कहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

दिइएका विन्दुहरू A (3, 1) र B (–4, 2) छन् । विस्थापन भेक्टर $T = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ छ ।

हामीलाई थाहा छ,

$$P(x, y) \xrightarrow{T = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}} P'(x + a, y + b)$$

त्यसैले,

$$A(3, 1) \xrightarrow{T = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}} A'(3 + 1, 1 + 4) = A'(4, 5)$$

$$B(-4, 2) \xrightarrow{T = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}} B'(-4 + 1, 2 + 4) = B'(-3, 6)$$

अतः प्रतिबिम्बका निर्देशाङ्कहरू A' (4, 5) र B' (–3, 6) छन् ।

उदाहरण 2

X (7, –9) र Y (–1, –1) जोड्ने रेखा XY लाई $\overrightarrow{XY}$ को परिमाण र दिशामा विस्थापन गर्दा आउने प्रतिबिम्ब X'Y' का विन्दुहरू X' र Y' का निर्देशाङ्कहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

X (7, –9) र Y (–1, –1) दुई विन्दुहरू हुन् ।

$\overrightarrow{OX} = (7, -9)$ र $\overrightarrow{OY} = (-1, -1)$

त्यसैले, $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OX} = (-1, -1) - (7, -9) = (-8, 8)$

अब,

$$X(7, -9) \xrightarrow{\overrightarrow{XY} = \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \end{pmatrix}} X'(7 - 8, -9 + 8) = X'(-1, -1)$$

$$Y(-1, -1) \xrightarrow{\overrightarrow{XY} = \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \end{pmatrix}} Y'(-1 - 8, -1 + 8) = Y'(-9, 7)$$

अतः X'(–1, –1) र Y'(–9, 7) क्रमशः विन्दुहरू X (7, –9) र Y(–1, –1) का प्रतिबिम्बहरू हुन् ।

उदाहरण 3

यदि M (– 4, 3) लाई कुनै विस्थापन भेक्टरले M' (4, 4) मा विस्थापन गर्छ भने विस्थापन भेक्टर पत्ता लगाउनुहोस् । साथै, उक्त विस्थापन भेक्टर प्रयोग गरी N (2, –5) को प्रतिबिम्ब पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

मानौं, विस्थापन भेक्टर $T = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ हो । M (–4, 3) र M' (4, 4) छन् ।

अब, $M(-4, 3) \xrightarrow{T = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}} M'(-4 + a, 3 + b)$

तर प्रश्नानुसार M' (4, 4) हो ।

त्यसैले, $(4, 4) = (-4 + a, 3 + b)$

उही विन्दुका सङ्गति निर्देशाङ्कहरू बराबर हुने भएकाले $4 = -4 + a$ र $4 = 3 + b$

$\therefore a = 4 + 4 = 8$ र $b = 4 - 3 = 1$

तसर्थ, विस्थापन भेक्टर $T = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$ हो ।

फेरि,

$N(2, -5) \xrightarrow{T = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}} N'(2 + 8, -5 + 1) = N'(10, -4)$

अत: N (2, –5) को प्रतिबिम्ब N' (10, –4) हुन्छ ।

उदाहरण 4

यदि ΔABC को शीर्षविन्दुहरू A (–2, 1), B (–2, –4) र C (1, 4) भए ΔABC लाई भेक्टर $T = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ मा विस्थापन गर्दा आउने प्रतिबिम्बका निर्देशाङ्कहरू पत्ता लगाउनुहोस् र दुवै त्रिभुजलाई लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

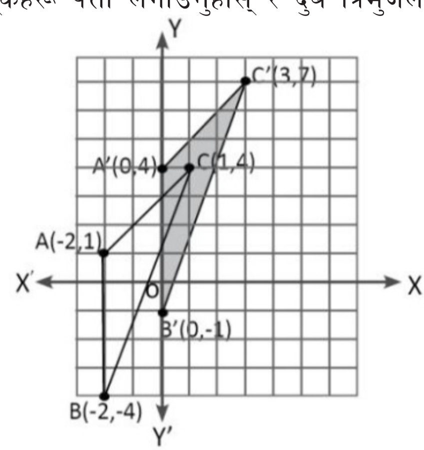
समाधान : यहाँ,

ΔABC का शीर्षविन्दुहरू A (–2, 1), B (–2, –4) र C (1, 4) छन् । साथै विस्थापन भेक्टर $T = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

हामीलाई थाहा छ,

$P(x, y) \xrightarrow{T = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}} P'(x + a, y + b)$

त्यसैले,



$A(-2, 1) \xrightarrow{T = \binom{2}{3}} A'(-2 + 2, 1 + 3) = A'(0, 4)$

$B(-2, -4) \xrightarrow{T = \binom{2}{3}} B'(-2 + 2, -4 + 3) = B'(0, -1)$

$C(1, 4) \xrightarrow{T = \binom{2}{3}} C'(1 + 2, 4 + 3) = C'(3, 7)$

अतः A' (0, 4), B' (0, –1) र C' (3, 7) प्रतिबिम्ब त्रिभुज A'B'C' का निर्देशाङ्कहरू हुन् ।

फेरि, ΔABC र ΔA'B'C' लाई सँगैको लेखाचित्रमा प्रस्तुत गरिएको छ ।

अभ्यास 9.1

1. दिइएका प्रश्नहरूको उपयुक्त विकल्पमा ठिक चिह्न (✓) लगाउनुहोस् :

(क) तलका मध्ये कुन स्थानान्तरण विस्थापन (translation) हो ?

a. आकृतिलाई घुमाउनु   b. आकृतिलाई एक स्थानबाट अर्को स्थानमा सार्नु

c. आकृतिलाई ठूलो बनाउनु   d. आकृतिलाई ऐनाबाट प्रतिबिम्ब बनाउनु

(ख) त्रिभुजलाई कुनै भेक्टरले विस्थापन गर्दा त्यसको आकार र क्षेत्रफलमा के प्रभाव पर्छ ?

a. आकार मात्र बदलिन्छ ।   b. क्षेत्रफल मात्र बदलिन्छ ।

c. आकार र क्षेत्रफल दुबै बदलिन्छ ।   d. आकार र क्षेत्रफल दुबै उस्तै रहन्छ ।

(ग) कुनै विन्दु P (x, y) लाई विस्थापन भेक्टर $T = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ले विस्थापन गर्दा बन्ने प्रतिबिम्ब पत्ता लगाउने सूत्र कुन हो ?

a. $P(x, y) \xrightarrow{T = \binom{a}{b}} P'(x + a, y + b)$

b. $P(x, y) \xrightarrow{T = \binom{a}{b}} P'(x - a, y - b)$

c. $P(x, y) \xrightarrow{T = \binom{a}{b}} P'(x - a, y + b)$

d. $P(x, y) \xrightarrow{T = \binom{a}{b}} P'(x + a, y - b)$

(घ) यदि विन्दु Q (–2, 4) लाई विस्थापन भेक्टर $T = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ले विस्थापन गर्दा बन्ने प्रतिबिम्ब Q' को निर्देशाङ्क तलका मध्ये कुन हो

a. Q' (–1, 6)   b. Q' (1, 6)   c. Q' (–1, –6)   d. Q' (5, 6)

(ङ) विन्दु P (3, –4) लाई विस्थापन गर्दा प्रतिबिम्ब P' (–2, –1) बन्छ भने विस्थापन भेक्टर T को मान कति हुन्छ ?

a. $T=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ b. $T=\begin{pmatrix}5\\-5\end{pmatrix}$ c. $T=\begin{pmatrix}-5\\3\end{pmatrix}$ d. $T=\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}$

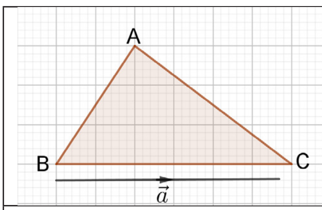
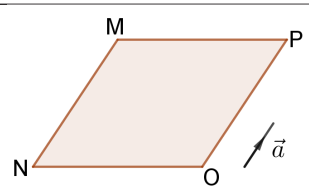
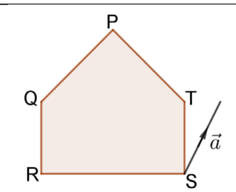
(च) विन्दु P(–1, 4) लाई x अक्षमा 5 एकाइ दायाँतर्फ विस्थापन गर्दा बन्ने प्रतिबिम्बको निर्देशाङ्क के हुन्छ ?

a. P' (4, 4) b. P' (–6, 4) c. P' (–1, 9) d. P' (4, –4)

(छ) कुनै विन्दु (x, y) लाई (–3, 5) ले स्थानान्तरण गरेपछि प्राप्त विन्दु तलका मध्ये कुन हो ?

a. $(x-3, y-5)$ b. $(x+3, y+5)$ c. $(x-3, y+5)$ d. $(x-3, y-5)$

2. दिइएका चित्रहरूलाई दिइएका विस्थापन भेक्टर $\vec{a}$ ले विस्थापन गर्नुहोस् :

		
(क)	(ख)	(ग)

3. विस्थापन भन्नाले के बुभिन्छ, उदाहरणसहित लेख्नुहोस् ।

4. विस्थापन भेक्टर $(T)=\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$ ले दिइएका विन्दुहरूलाई विस्थापन गर्दा बन्ने प्रतिबिम्बको निर्देशाङ्कहरू पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) A (–1, 3) (ख) B (2, –2) (ग) C (5, 6)

(घ) D (–4, –4) (ङ) E (7, 2) (च) F (2, –4)

5. यदि P (2, 3), Q (–2, 4) र R (4, –2) शीर्षविन्दुहरू भएको ΔPQR लाई विस्थापन भेक्टर $(T)=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ ले ΔP'Q'R' मा विस्थापन गर्छ भने ΔP'Q'R' को शीर्षविन्दुहरूका निर्देशाङ्कहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

6. दिइएका विन्दुहरू A(3, 5), B (–3, 5) र C(3, –5) भए,

(क) $\overrightarrow{AB}$ ले विन्दु A लाई कुन विन्दुमा विस्थापन गर्छ ?

(ख) $\overrightarrow{BC}$ ले विन्दु B लाई कुन विन्दुमा विस्थापन गर्छ ?

(ग) $\overrightarrow{CA}$ ले विन्दु C लाई कुन विन्दुमा विस्थापन गर्छ ?

7. कुनै विस्थापन भेक्टरले A (–5, 6) लाई A'(–3, 3) मा विस्थापन गर्छ भने विस्थापन भेक्टर पत्ता लगाउनुहोस् ।

8. बिन्दु R (4, 7) लाई विन्दु R' (–3, –5) मा विस्थापन गर्ने भेक्टर पत्ता लगाउनुहोस् । उक्त विस्थापन भेक्टरले S (4, 1) लाई कुन विन्दुमा विस्थापन गर्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

9. यदि $U(5, 3) \xrightarrow{T=\binom{a}{b}} U'(4, 2)$ भए a र b को मान पत्ता लगाउनुहोस् । भेक्टर $T = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ले विन्दु V (–5, 4) लाई कुन विन्दुमा विस्थापन गर्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

10. ΔABC का शीर्षविन्दुहरू A (1, –1), B (–2, 2) र C (3, 3) भए ΔABC लाई भेक्टर $T = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ले विस्थापन गर्दा बन्ने प्रतिबिम्ब ΔA'B'C' को शीर्षविन्दुहरूका निर्देशाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् । साथै ΔABC र ΔA'B'C' लाई लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

11. यदि A (1, 8), B (–3, 9), C (0, 13) र D (4, 12) एउटा समानान्तर चतुर्भुज ABCD का शीर्षविन्दुहरू हुन् भने,

    (क) $\overrightarrow{AB}$ पत्ता लगाउनुहोस् ।

    (ख) $\overrightarrow{AB}$ प्रयोग गरी समानान्तर चतुर्भुज ABCD लाई विस्थापन गरी बन्ने प्रतिबिम्बको शीर्षविन्दुहरूका निर्देशाङ्क लेख्नुहोस् र दुबै चतुर्भुजलाई लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

12. A (–4, 6), B (3, –2) र C (1, 2) ΔABC का शीर्षविन्दुहरू हुन् । ΔABC लाई $T_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ भेक्टरले ΔA'B'C' मा विस्थापन गर्छ भने $T_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ भेक्टरले ΔA'B'C' लाई ΔA"B"C"मा विस्थापन गर्छ ।

    (क) ΔA'B'C' र ΔA"B"C"का शीर्षविन्दुहरूका निर्देशाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

    (ख) ती त्रिभुज ΔABC, ΔA'B'C' र ΔA"B"C" लाई एउटै लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

13. कुनै विन्दु P(x, y) लाई $x = 1$ रेखामा परार्वतन गरेर आउने प्रतिबिम्बलाई फेरि $x = 3$ रेखामा परावर्तन गर्दा आउने प्रतिबिम्ब र उक्त विन्दु P (x, y) लाई विस्थापन भेक्टर T (4, 0) ले विस्थापन गर्दा आउने प्रतिबिम्ब तुलना गर्नुहोस् । यसबाट के निष्कर्ष निकाल्न सकिन्छ, स्पष्ट पार्नुहोस् ।

उत्तर

1 - 3 शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

4. (क) A' (1, 1) (ख) B' (4, –4) (ग) C' (7, 4) (घ) D' (–2, –6) (ङ) E' (9, 0) (च) F' (4, –6)

5. P' (5, 5), Q' (1, 6), R' (7, 0) 6. (क) A' (–3, 5) (ख) B' (3, –5) (ग) C' (3, 5)

7. $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ 8. $\begin{pmatrix} -7 \\ -12 \end{pmatrix}$, (–3, –11) 9. $a = -1$, $b = -1$, (–6, 3)

10. A' (3, 2), B' (0, 5), C' (5, 6) लेखाचित्र शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

11. (क) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ (ख) A' (–3, 9), B' (–7,10), C' (–4, 14), D' (0, 13) र लेखाचित्र शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

12. क) A' (–3, 4), B' (4, –4), C' (2, 0), A'' (–5, 7), B'' (2, –1), C''(0, 3)

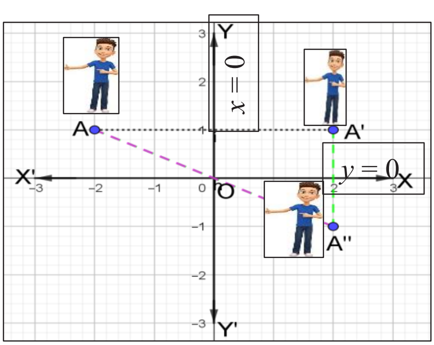
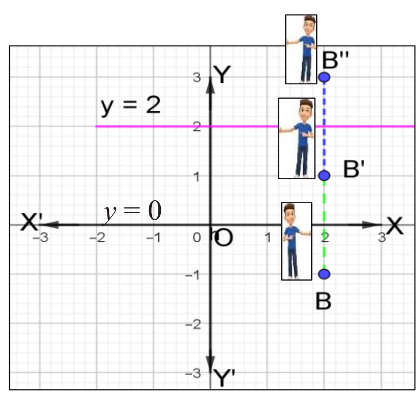
(ख) लेखाचित्र शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

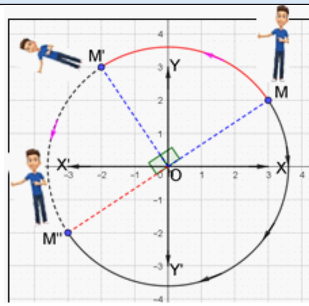
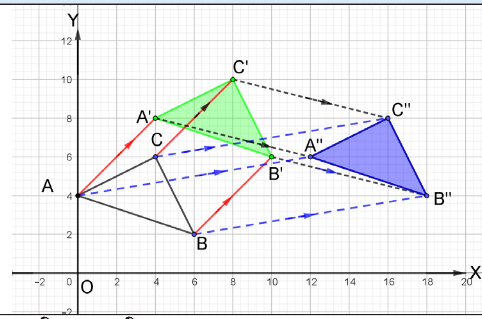
13. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

9.3 संयुक्त स्थानान्तरण (Combined Transformation)

क्रियाकलाप 1

दिइएका लेखाचित्रहरूको अध्ययन गर्नुहोस् र सोधिएका प्रश्नहरूमा छलफल गर्नुहोस् :

(क)	(ख)
	

(अ) चित्रमा A, A' र A" का निर्देशाङ्कहरू के के छन् ? (आ) कुन रेखामा परावर्तन गर्दा A को प्रतिबिम्ब A' बनेको छ ? (इ) A' लाई कुन रेखामा परावर्तन गर्दा A" बनेको छ ? (ई) के दुबै परावर्तनले जनाउने रेखाहरू एकआपसमा प्रतिच्छेदित छन् वा छैनन् ? (उ) विन्दु A को प्रतिबिम्ब A" हुन कुन एकल स्थानान्तरणले कार्य गर्छ, छलफल गर्नुहोस् ।	(अ) चित्रमा B, B' र B" का निर्देशाङ्कहरू के के छन् ? (आ) कुन रेखामा परावर्तन गर्दा B को प्रतिबिम्ब B' बनेको छ ? (इ) B' लाई कुन रेखामा परावर्तन गर्दा B" बनेको छ ? (ई) दुबै परावर्तनले जनाउने रेखाहरू एकआपसमा प्रतिच्छेदित वा समानान्तर के छन् ? (उ) विन्दु B को प्रतिबिम्ब B" हुन कुन एकल स्थानान्तरणले कार्य गर्छ, छलफल गर्नुहोस् ।
(ग)	**(घ)**
 	
(अ) चित्रमा M, M' र M" का निर्देशाङ्कहरू के के हुन्छन् ? (आ) कुन विन्दुको वरिपरि कति डिग्रीमा र कुन दिशामा परिक्रमण गर्दा M को प्रतिबिम्ब M' बनेको छ ? (इ) कुन विन्दुको वरिपरि, कति डिग्रीमा र कुन दिशामा परिक्रमण गर्दा M' को प्रतिबिम्ब M" बनेको छ ? (ई) विन्दु M को प्रतिबिम्ब M" हुन कुन एकल स्थानान्तरणले कार्य गर्छ, छलफल गर्नुहोस् ।	(अ) चित्रमा त्रिभुज ABC, A'B'C' र A"B"C" का निर्देशाङ्कहरू के के हुन्छन् ? (आ) ΔABC लाई कति एकाइ दायाँ र कति एकाइ माथि विस्थापन गर्दा प्रतिबिम्ब ΔA'B'C' बनेको छ ? (इ) ΔA'B'C' लाई कति एकाइ दायाँ र कति एकाइ तल विस्थापन गर्दा प्रतिबिम्ब ΔA"B"C" बनेको छ ? (ई) ΔABC को प्रतिबिम्ब ΔA"B"C" बन्न कुन एकल स्थानान्तरणले कार्य गर्छ, छलफल गर्नुहोस् ।

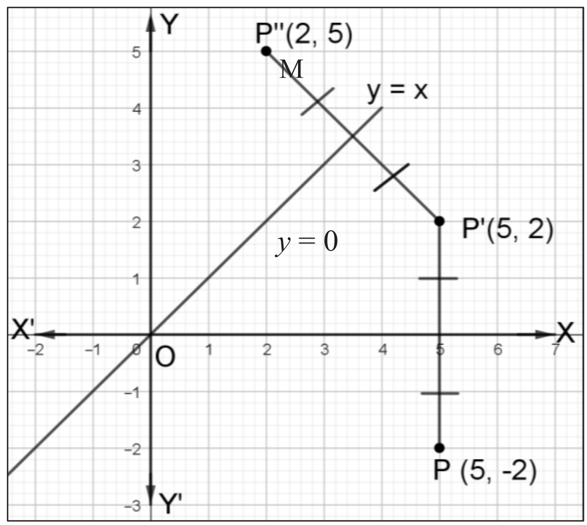
कुनै वस्तु वा ज्यामितीय चित्रलाई r_1 र r_2 स्थानान्तरणले क्रमशः स्थिति A बाट A' र A' बाट A" मा पुर्‍याउँछन् भने A बाट A" पुर्‍याउने एकल स्थानान्तरणलाई संयुक्त स्थानान्तरण भनिन्छ ।

9.3.1 समान दुईओटा स्थानान्तरणको संयुक्त स्थानान्तरण (Combined Transformation of Two Identical Transformation)

दुई स्थानान्तरणहरू क्रमशः एकपछि अर्को प्रयोग गर्दा प्राप्त हुने नयाँ स्थानान्तरणलाई नै संयुक्त स्थानान्तरण भनिन्छ । दुई संयुक्त परावर्तन, दुई संयुक्त परिक्रमण, दुई संयुक्त विस्थापन र दुई संयुक्त विस्तृतीकरणलाई समान दुईओटा स्थानान्तरणको संयुक्त स्थानान्तरण भन्ने बुझिन्छ ।

संयुक्त परावर्तन (Combined Reflection)

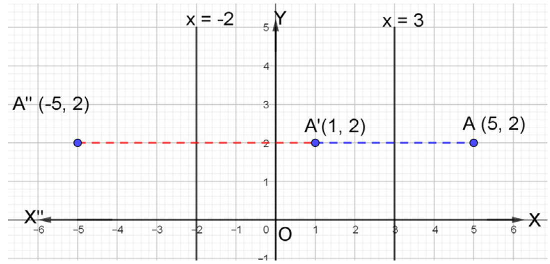
(क) परावर्तन गर्ने दुई रेखाहरू कुनै एउटा विन्दुमा प्रतिच्छेदन हुँदा



सँगै दिइएको चित्रमा, विन्दु P(5, – 2) लाई X- अक्ष (रेखा $y = 0$) मा परावर्तन गर्दा त्यसको प्रतिबिम्ब P' (5, 2) बन्छ । फेरि विन्दु P' (5, 2) लाई रेखा $y = x$ मा परावर्तन गर्दा प्रतिबिम्ब P"(2, 5) बन्छ । यहाँ रेखाहरू $y = 0$ र $y = x$ एकआपसमा विन्दु O मा प्रतिच्छेदित भएका छन् । P (5, – 2) को अन्तिम प्रतिबिम्ब P"(2, 5) जुन, $P(x, y) \longrightarrow P'(-y, x)$ जस्तै छ, जसले उद्‌गमविन्दुको वरिपरि $+90^\circ$ को परिक्रमणलाई जनाउँछ । रेखा $y = x$ ले x अक्षसँग 45° को कोण बनाएको छ । यसरी प्राप्त हुने संयुक्त परावर्तनलाई रेखा $y = x$ र x अक्ष $(y = 0)$ प्रतिच्छेदन भएको विन्दु O केन्द्रविन्दु र रेखा $y = x$ र X- अक्षबिचको कोण दुई गुणाको कोणमा भएको परिक्रमणमा व्यक्त गर्न सकिन्छ । यस चित्रमा P(5, – 2) को अन्तिम प्रतिबिम्ब P" (2, 5) बन्दा भएको संयुक्त स्थानान्तरण उद्‌गमविन्दुको वरिपरि 90° मा भएको परिक्रमणसँग समतुल्य हुन्छ ।

> एउटा परावर्तनपछि अर्को परावर्तनको संयुक्त स्थानान्तरण ती दुई परावर्तनका अक्षहरूबिचको कोणको दुई गुणा बराबरको कोणले गरिएको परिक्रमणसँग समतुल्य हुन्छ । परावर्तन गर्ने दुई रेखाहरू प्रतिच्छेदित हुने विन्दु नै परिक्रमणको केन्द्र हो र पहिलो परावर्तन गर्ने रेखाबाट दोस्रो परावर्तन गर्ने रेखातर्फको दिशा परिक्रमणको दिशा हुन्छ । यदि R_1 र R_2 ले प्रतिच्छेदित हुने परावर्तनका अक्षहरूलाई जनाउँछन् भने यी दुई परावर्तनको संयुक्त स्थानान्तरण परिक्रमण हो । सो परिक्रमणको केन्द्र अक्षहरू प्रतिच्छेदित भएको विन्दु हुन्छ । त्यसैले संयुक्त स्थानान्तरण, $R_2 \circ R_1 = 2 \times$ परावर्तनका अक्षहरूबिचको कोण हुन्छ ।

(ख) परावर्तन गर्ने दुई अक्षहरू एकआपसमा समानान्तर हुँदा



सँगै दिइएको चित्रमा विन्दु A (5, 2) लाई रेखा $x = 3$ मा परावर्तन गर्दा त्यसको प्रतिबिम्ब A' (1, 2) बन्छ । फेरि, विन्दु A' (1, 2) लाई रेखा $x = -2$ मा परावर्तन गर्दा प्रतिबिम्ब A" (–5, 2) बन्छ । यहाँ रेखाहरू $x = 3$ र $x = -2$ Y- अक्षसँग समानान्तर छन् । A (5, 2) को अन्तिम प्रतिबिम्ब A" (–5, 2) बन्दा विस्थापन भएको मानिन्छ जहाँ विस्थापनको भेक्टर T $\binom{a}{b} = 2\binom{-2-3}{0} = \binom{-10}{0}$ हुन्छ ।

एउटा परावर्तनपछि अर्को परावर्तन गर्दा ती दुई परावर्तन गर्ने अक्षहरूबिचको विस्थापनको दुई गुणा बराबरको विस्थापनसँग बराबर हुन्छ । त्यसैले परावर्तन गर्ने अक्षहरू एकआपसमा समानान्तर भएको अवस्थामा एकल स्थानान्तरण विस्थापनसँग समतुल्य हुन्छ ।

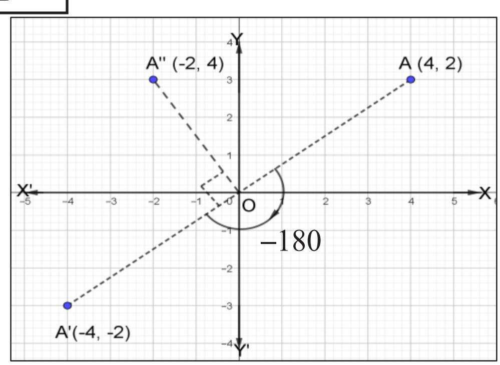
यदि R_1 र R_2 ले क्रमशः रेखाहरू $x = h_1$ र $x = h_2$ मा हुने परावर्तनलाई जनाउँछन् र Y अक्षसँग समानान्तर हुन्छन् भने दुई परावर्तनको संयुक्त स्थानान्तरण भनेको विस्थापन हो । यस अवस्थामा विस्थापन भेक्टर कसरी पत्ता लगाउन सकिन्छ, छलफल गर्नुहोस् ।

R_2oR_1 = विस्थापन भेक्टर = T $\binom{a}{b} = 2\binom{h_2 - h_1}{0}$ र
R_1oR_2 = विस्थापन भेक्टर = T $\binom{a}{b} = 2\binom{h_1 - h_2}{0}$

त्यसै गरी, यदि r_1 र r_2 ले क्रमशः रेखाहरू $y = k_1$ र $y = k_2$ मा हुने परावर्तनलाई जनाउँछन् र X अक्षसँग समानान्तर हुन्छन् भने दुई परावर्तनको संयुक्त स्थानान्तरण भनेको पनि विस्थापन नै हो । यस अवस्थामा विस्थापन भेक्टर कसरी पत्ता लगाउन सकिन्छ, छलफल गर्नुहोस् ।

r_2or_1 = विस्थापन भेक्टर = T $\binom{a}{b} = 2\binom{0}{k_2 - k_1}$ र
r_1or_2 = विस्थापन भेक्टर = T $\binom{a}{b} = 2\binom{0}{k_1 - k_2}$

संयुक्त परिक्रमण (Combined Rotation)



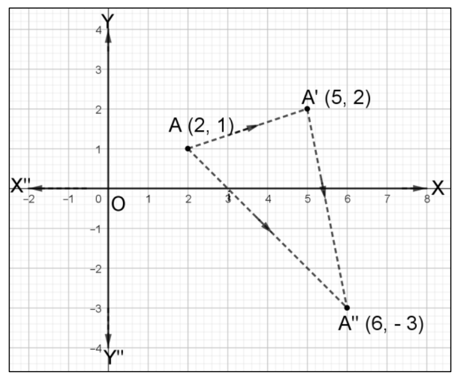
सँगै दिइएको चित्रमा, विन्दु A (4, 2) लाई उद्गमविन्दुको वरिपरि –180° परिक्रमण गराउँदा त्यसको प्रतिबिम्ब A' (–4,– 2) बन्छ । फेरि विन्दु A' (–4,– 2) लाई उद्गमविन्दुको वरिपरि –90° मा परिक्रमण गराउँदा त्यसको प्रतिबिम्ब A" (–2, 4) बन्छ ।

यहाँ A (4, 2) को अन्तिम प्रतिबिम्ब A" (–2, 4) जुन, $P(x, y) \longrightarrow P'(-y, x)$ जस्तै छ, जसले उद्गमविन्दुको वरिपरि + 90° वा – 270° को परिक्रमणलाई जनाउँछ ।

परिक्रमणका केन्द्रहरू उही र कोण समान वा फरक भएका दुई परिक्रमणहरूको संयुक्त स्थानान्तरण, परिक्रमणहरूको केन्द्र उही र कोण दुई ती दुई कोणहरूको योगफलसँग बराबर हने परिक्रमणसँग समतुल्य हुन्छ । यदि R_1 र R_2 एउटै केन्द्रमा आधारित परिक्रमणहरू भए संयुक्त परिक्रमण : $R_1 o R_2 = R_2 o R_1 = R_1 + R_2$ हुन्छ । अर्थात् यदि $R_1 [(0, 0), \theta_1]$ र $R_2 [(0, 0), \theta_2]$ दुईओटा परिक्रमणहरू भए संयुक्त परिक्रमण : $R_2 o R_1 = R_1 o R_2 = R [[(0, 0), \theta_1 + \theta_2)]$ हुन्छ ।

विचारणीय प्रश्न : यदि दुईओटा परिक्रमणहरू $R_1 [(0, 0), \theta_1]$ र $R_2 [(0, 0), -\theta_2]$ भए संयुक्त परिक्रमण : $R_2 o R_1$ को केन्द्र के र कोण कति हुन्छ, छलफल गर्नुहोस् ।

संयुक्त विस्थापन (Combined Translation)



सँगै दिइएको लेखाचित्रमा, विन्दु A (2, 1) लाई विस्थापन भेक्टर $(T_1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ले विस्थापन गर्दा प्रतिबिम्ब A' (5, 2) बन्छ । त्यसै गरी प्रतिबिम्ब विन्दु A' (5, 2) लाई विस्थापन भेक्टर $(T_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ ले विस्थापन गर्दा प्रतिबिम्ब A" का निर्देशाङ्कहरू के बन्छन्, छलफल गर्नुहोस् । अतः विन्दु A (2, 1) को अन्तिम प्रतिबिम्ब A" (6, –3) हुन्छ ।

हामीलाई थाहा छ, A" (6, –3) = (2 + 4, 1 –4)

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3+1 \\ 1-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

अतः $A'' = A + (T_1 + T_2)$

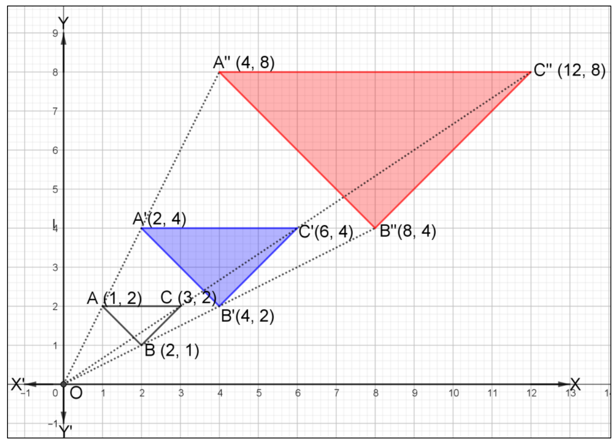
दुई विस्थापनहरूको संयुक्त स्थानान्तरण पनि विस्थापन नै हुन्छ जसमा विस्थापन भेक्टर दुई विस्थापन भेक्टरको योगफलसँग बराबर हुन्छ । यदि T_1 र T_2 दुई विस्थापनहरू भए संयुक्त विस्थापन $T_2 o T_1 = T_1 o T_2 = T_1 + T_2$ अर्थात् यदि विस्थापन भेक्टर, $T_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ लाई $T_2 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ ले पछ्याउने हो भने संयुक्त विस्थापनलाई $T_2 o T_1$ अथवा $T_2 T_1$ ले जनाइन्छ । जहाँ $T_2 o T_1 = T_1 + T_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$ हुन्छ । त्यसै गरी विस्थापन भेक्टर $T_1 o T_2 = T_2 + T_1 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c+a \\ d+b \end{pmatrix}$ हुन्छ । अतः विस्थापन भेक्टर $T_1 o T_2$ र $T_2 o T_1$ बराबर हुन्छन् ।

संयुक्त विस्तृतीकरण (Combined Enlargement)

सँगै दिइएको लेखाचित्रमा, त्रिभुज ABC लाई विस्तृतीकरणको केन्द्र (centre of enlargement) उद्गमविन्दु O (0, 0) र विस्तृतीकरणको नापो (scale factor) 2 लिएर त्रिभुज A'B'C' मा विस्तार गरिएको छ । त्यसै गरी त्रिभुज A'B'C' लाई पनि विस्तृतीकरणको केन्द्र उद्गमविन्दु O (0, 0) र विस्तृतीकरणको नापो (scale factor) 2 लिएर विस्तार गरिएको छ । त्रिभुज ABC लाई त्रिभुज A'B'C' मा विस्तार गर्दा (O, 2) मा विस्तार भएको भनिन्छ भने,

(क) त्रिभुज ABC लाई त्रिभुज A"B"C" मा विस्तार गर्दा विस्तृतीकरणको केन्द्र कति छ ?

(ख) त्यसै गरी त्रिभुज ABC लाई त्रिभुज A"B"C" मा विस्तार गर्दा विस्तृतीकरणको नापो कति हुन्छ ? कसरी पत्ता लगाउन सकिन्छ ?



(ग) त्रिभुज ABC लाई त्रिभुज A"B"C" मा विस्तार गर्दा विस्तृतीकरणको नापो कति भएको भनिन्छ, छलफल गनुहोस् ।

लेखाचित्रमा, AA", BB" र CC" एउटै विन्दु O मा काटिएका छन्, त्यसैले ΔABC लाई ΔA"B"C" मा विस्तार गर्दा विस्तृतीकरणको केन्द्र उद्गमविन्दु O (0, 0) नै हुन्छ ।

यहाँ, ΔABC लाई ΔA'B'C' मा विस्तार गर्दा विस्तृतीकरणको नापो $(k_1) = 2$ र ΔA'B'C' लाई A"B"C" मा विस्तार गर्दा विस्तृतीकरणको नापो $(k_2) = 2$ भएकाले संयुक्त विस्तृतीकरणको नापो $(k) = k_1 \times k_2 = 2 \times 2 = 4$ हुन्छ । त्रिभुज ABC लाई त्रिभुज A"B"C" मा विस्तार गर्दा विस्तृतीकरणको नापो (0, 4) अथवा E[(0, 0), 4] भएको भनिन्छ । यसरी त्रिभुज ABC को अन्तिम प्रतिबिम्ब त्रिभुज A"B"C" हुन्छ जसलाई निर्देशाङ्कका रूपमा देखाउँदा,

जहाँ, $A(1, 2) \xrightarrow{E[(0,0),4]} A''(4 \times 1, 4 \times 2) = A''(4, 8)$

$B(2, 1) \xrightarrow{E[(0,0),4]} B''(4 \times 2, 4 \times 1) = B''(8, 4)$

$C(3, 2) \xrightarrow{E[(0,0),4]} C''(4 \times 3, 4 \times 2) = C''(12, 8)$

विस्तृतीकरणका केन्द्रहरू उही र विस्तृतीकरणको नाप समान वा फरक भएका दुई विस्तारको संयुक्त स्थानान्तरण, विस्तृतीकरणको केन्द्र उही र विस्तृतीकरणको नापो ती दुई विस्तृतीकरणको नापोको गुणनफलसँग बराबर हने विस्तृतीकरणसँग समतुल्य हुन्छ ।

(क) दुईओटा विस्तृतीकरण E_1 $[(0, 0), k_1]$ र E_2 $[(0, 0), k_2]$ भए संयुक्त विस्तृतीकरण

$E_2 o E_1 = E_1 o E_2 = E[(0, 0), k_1 \times k_2]$ हुन्छ ।

(ख) दुईओटा विस्तृतीकरण E_1 $[(a, b), k_1]$ र E_2 $[(a, b), k_2]$ भए संयुक्त विस्तृतीकरण

$E_2 o E_1 = E_1 o E_2 = E[(a, b), k_1 \times k_2]$ हुन्छ ।

उदाहरण 1

यदि R_1 ले X- अक्षमा हुने परावर्तन र R_2 ले Y- अक्षमा हुने परावर्तनलाई जनाउँछ भने संयुक्त स्थानान्तरण $R_2 o R_1$ ले कुन एकल स्थानान्तरण जनाउँछ, लेख्नुहोस् र सोही एकल स्थानान्तरणको प्रयोग गरी विन्दु A (2, 3) को प्रतिबिम्ब पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान यहाँ,

R_1 = X–अक्षमा हुने परावर्तन र R_2 = Y–अक्षमा मा हुने परावर्तन एकआपसमा उद्‌गमविन्दुमा प्रतिच्छेदित हुन्छन् त्यसैले एकल स्थानान्तरण $R_2 o R_1$ परिक्रमण हो । X–अक्ष र Y–अक्षबिचको कोण 90° छ ।

संयुक्त परिक्रमण = $R_1 o R_2 = 2 \times 90° = 180°$ र

परिक्रमणको केन्द्र (0, 0)

दिइएको विन्दु A (2, 3) छ । हामीलाई थाहा छ,

$P(x, y) \xrightarrow{R_1 o R_2 [(0, 0), 180°]} P'(-x, -y)$

अब, $A(2, 3) \xrightarrow{R_1 o R_2 [(0, 0), 180°]} A'(-2, -3)$

अतः विन्दु A (2, 3) को प्रतिबिम्ब A' (–2, –3) हुन्छ ।

अर्को तरिका

R_1 = X–अक्षमा हुने परावर्तन र

R_2 = Y–अक्षमा हुने परावर्तन

जनाउँछन्, अब, $R_1 o R_2 (2, 3)$

$= R_1(R_2 (2, 3))$

$= R_1 (-2, 3)$

$= (-2, -3)$

अतः विन्दु A (2, 3) को प्रतिबिम्ब A' (–2, –3) हुन्छ ।

उदाहरण 2

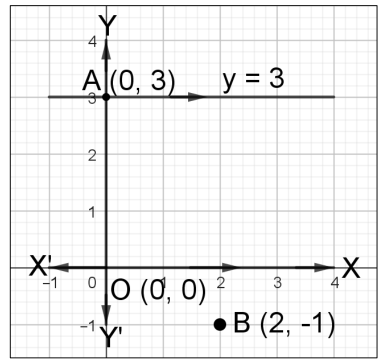
यदि R_1 ले X–अक्षमा हुने परावर्तन र R_2 ले $y = 3$ मा हुने परावर्तनलाई जनाउँछ भने संयुक्त स्थानान्तरण $R_2 o R_1$ ले कुन एकल स्थानान्तरण जनाउँछ, लेख्नुहोस् । सोही एकल स्थानान्तरणको प्रयोग गरी विन्दु B (2, –1) को प्रतिबिम्ब पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

R_1 = X–अक्षमा हुने परावर्तन र R_2 ले $y = 3$ मा हुने परावर्तन जनाउँछ । R_1 र R_2 एकआपसमा समानान्तर छन् त्यसैले $R_2 o R_1$ ले जनाउने एकल स्थानान्तरण विस्थापन हो ।

दिइएको विन्दु B (2, –1) छ ।

$R_2oR_1 = T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 2\,\overrightarrow{OA} = 2\begin{pmatrix} 0-0 \\ 3-0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$



हामीलाई थाहा छ, $P(x, y) \xrightarrow{T = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}} P'(x + a, y + b)$

अब,

$B(2, -1) \xrightarrow{T = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}} B'(2 + 0, -1 + 6) = B'(2, 5)$

अतः विन्दु B (2, –1) को प्रतिबिम्ब B' (2, 5) हुन्छ ।

उदाहरण 3

$T_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ र $T_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ दुईओटा विस्थापन हुन् । संयुक्त स्थानान्तरण T_1oT_2 अथवा T_2oT_1 प्रयोग गरी विन्दु Q (–3, –4) को प्रतिबिम्ब पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

$T_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ र $T_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ दुईओटा विस्थापन हुन् । दिइएको विन्दु Q (–3, –4) छ । दुईओटा विस्थापनको संयुक्त स्थानान्तरण $T_1 o T_2$ अथवा T_2oT_1 ले पनि विस्थापन नै जनाउँछ ।

संयुक्त विस्थापन भेक्टर $T_1 o T_2$ अथवा $T_2oT_1 = T_2 + T_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

अब, विस्थापन भेक्टर $T = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = T_1oT_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

सूत्रअनुसार, $p(x, y) \xrightarrow{T = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}} P(x + a, y + b)$

अब, $Q(-3, -4) \xrightarrow{T = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}} Q'(-3 + 5, -4 - 3) = Q'(2, -7)$ हुन्छ ।

अतः विन्दु Q (–3, –4) को प्रतिबिम्ब Q' (2, –7) हुन्छ ।

उदाहरण 4

E_1 [(0,0), 2)] र E_2 [(0, 0), $\frac{3}{2}$)] दुईओटा विस्तृतीकरणहरू हुन् । संयुक्त स्थानान्तरण E_1oE_2 को प्रयोग गरी विन्दु M (5, –7) को प्रतिबिम्ब पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

E_1 [(0,0), 2)] र E_2 [(0, 0), $\frac{3}{2}$)] दुईओटा विस्तृतीकरणहरू हुन् । दिइएको विन्दु M (5, –7) छ ।

हामीलाई थाहा छ, दुईओटा विस्तृतीकरणको संयुक्त स्थानान्तरणले पनि विस्तृतीकरण नै जनाउँछ । संयुक्त विस्तृतीकरण E_1oE_2 को केन्द्रविन्दु (0, 0) र विस्तृतीकरणको नापो (k) = $k_1 \times k_2 = 2 \times \frac{3}{2} = 3$

विस्तृतीकरणको केन्द्रविन्दु (0, 0) र विस्तृतीकरणको नापो (k) भएको अवस्थामा,

$$P(x, y) \xrightarrow{E[(0,0), k]} P'(kx, ky)$$

अब,

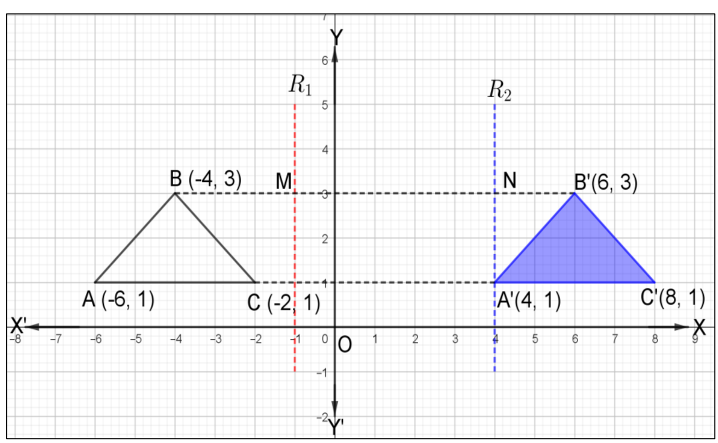
$$M(5, -7) \xrightarrow{E[(0,0), 3]} M'(3 \times 5, 3 \times (-7)) = M'(15, -21)$$

अतः विन्दु M (5, –7) को प्रतिबिम्ब M' (15, –21) हुन्छ ।

उदाहरण 5

एउटा त्रिभुज ABC का शीर्षविन्दुहरू A (–6, 1), B (–4, 3) र C (–2, 1) छन् । यदि R_1 ले $x = -1$ रेखामा हुने परावर्तन र R_2 ले $x = 4$ रेखामा हुने परावर्तनलाई जनाउँछ भने संयुक्त स्थानान्तरण R_2 o R_1 ले कुन एकल स्थानान्तरणलाई जनाउँछ, सोही एकल स्थानान्तरणको प्रयोग गरी ΔABC को प्रतिबिम्ब पत्ता लगाउनुहोस् । साथै ΔABC र प्रतिबिम्ब ΔA'B'C' लाई एउटै लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

समाधान : यहाँ,



R_1 ले $x = -1$ रेखामा हुने परावर्तन र R_2 ले $x = 4$ रेखामा हुने परावर्तनलाई जनाउँछ । A (–6, 1), B (–4, 3) र C (–2, 1) ΔABC का निर्देशाङ्कहरू हुन् । परावर्तन गर्ने रेखाहरू $x = -1$ र $x = 4$ एकआपसमा समानान्तर हुन्छन् त्यसैले संयुक्त स्थानान्तरण R_2 o R_1 ले जनाउने स्थानान्तरण विस्थापन भेक्टरसँग बराबर हुन्छ । दुईओटा परावर्तन गर्ने रेखाहरूबिचको दुरी MN छ ।

$$R_2 o R_1 = T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 2\overrightarrow{MN} = 2\begin{pmatrix} 4+1 \\ 3-3 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

हामीलाई थाहा छ, P $(x, y) \xrightarrow{T = \binom{a}{b}}$ P$'(x + a, y + b)$

अब, $A(-6, 1) \xrightarrow{T = \binom{10}{0}} A'(-6 + 10, 1 + 0)$ = A' (4, 1)

$B(-4, 3) \xrightarrow{T = \binom{10}{0}} B'(-4 + 10, 3 + 0)$ = B' (6, 3)

$C(-2, 1) \xrightarrow{T = \binom{10}{0}} C'(-2 + 10, 1 + 0)$ = C' (8, 1)

अतः ΔABC को प्रतिबिम्ब ΔA'B'C का निर्देशाङ्कहरू A' (4, 1), B' (6, 3) र C' (8, 1) हुन्छन् । ΔABC र प्रतिबिम्ब ΔA'B'C लाई सँगैको लेखाचित्रमा प्रस्तुत गरिएको छ ।

उदाहरण 6

एउटा त्रिभुज PQR का शीर्षविन्दुहरू P (4, –2), Q (2, 1) र R(5, 2) छन् । यी विन्दुहरूलाई परिक्रमण [(0, 0), 180°] र उही दिशामा परिक्रमण [(0, 0), 90°] बाट सुरु हुने संयुक्त स्थानान्तरणले कुन एकल स्थानान्तरणलाई जनाउँछ ? सोही एकल स्थानान्तरणको प्रयोग गरी ΔPQR को प्रतिबिम्बको निर्देशाङ्कहरू पत्ता लगाउनुहोस् । साथै ΔPQR र प्रतिबिम्ब ΔP'Q'R' लाई एउटै लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

त्रिभुज PQR का शीर्षविन्दुहरू P (4, –2), Q (2, 1) र R (5, 2) छन् । मानौँ, R_1 र R_2 ले क्रमशः परिक्रमण [(0, 0), 180°] र उही दिशामा परिक्रमण [(0, 0), 90°] लाई जनाउँछन् ।

त्यसैले, संयुक्त स्थानान्तरण $R_2 \circ R_1$ ले जनाउने स्थानान्तरण परिक्रमण हो ।

$R_2 o R_1$ = [(0, 0), 180°+ 90] = [(0, 0), 270°]

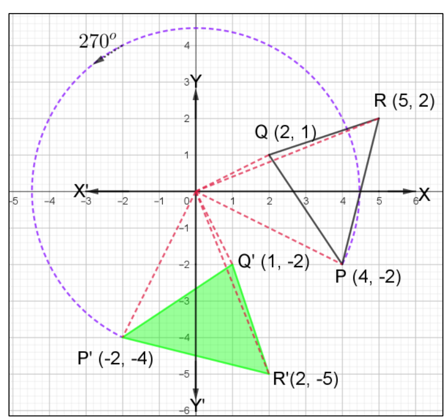
हामीलाई थाहा छ,

$p(x, y) \xrightarrow{R\,[(0,0),270°]} P(y, -x)$ अब,

$P(4, -2) \xrightarrow{R_2 o R_1\,[(0,0),270°]} P'(-2, -4)$

$Q(2, 1) \xrightarrow{R_2 o R_1\,[(0,0),270°]} Q'(1, -2)$

$R(5, 2) \xrightarrow{R_2 o R_1\,[(0,0),270°]} R'(2, -5)$



अतः ΔPQR को प्रतिबिम्ब ΔP'Q'R' का निर्देशाङ्कहरू P' (–2, –4), Q' (1, –2) र R' (2, –5) हुन्छन् । ΔPQR र प्रतिबिम्ब ΔP'Q'R' लाई सँगैको लेखाचित्रमा प्रस्तुत गरिएको छ ।

अभ्यास 9.2.1

1. दिइएका प्रश्नहरूको उपयुक्त विकल्पमा ठिक चिह्न (✓) लगाउनुहोस् :

(क) R_1 ले x-अक्षमा हुने परावर्तन र R_2 ले y-अक्षमा हुने परावर्तन जनाउँछन् भने संयुक्त स्थानान्तरण $R_1 o R_2$ ले कुन एकल स्थानान्तरणलाइ जनाउँछ ?

a. $[(0, 0), -90°]$ को परिक्रमण जनाउँछ b. $[(0,0), 90°]$ को परिक्रमण जनाउँछ

c. $[(0, 0), 180°]$ को परिक्रमण जनाउँछ d. $[(0, 0), 270°]$ को परिक्रमण जनाउँछ

(ख) R_1 ले x-अक्षमा हुने परावर्तन र R_2 ले y-अक्षमा हुने परावर्तन जनाउँछन् भने विन्दु A (2, 3) लाई संयुक्त स्थानान्तरण $R_1 o R_2$ ले स्थानान्तरण गर्दा बन्ने प्रतिबिम्ब कुन हो ?

a. A' (2, –3) b. A' (–2, 3) c. A' (–2, –3) d) A' (3, 2)

(ग) r_1 र r_2 ले क्रमशः परिक्रमण $[(0, 0), 45°]$ र उही दिशामा परिक्रमण $[(0, 0), 45°]$ जनाउँछन् भने संयुक्त स्थानान्तरण $r_1 o r_2$ बाट विन्दु M (1, 2) को प्रतिबिम्ब कति हुन्छ ?

a. A' (–2, 1) b. A' (1, 2 c. A' (–1, 2) d. A' (2, 1)

(घ) रेखाहरू $x = 3$ र $x = 5$ मा हुने परावर्तनको संयुक्त स्थानान्तरणले कुन स्थानान्तरण दिन्छ ?

a. $\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ ले विस्थापन b. (+180°) को परिक्रमण

c. (+90°) को परिक्रमण d. $\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$ ले विस्थापन

(ङ) परिक्रमण $R_1 [(0,0), \theta]$ र $R_2 [(0,0), \alpha]$ले दिने संयुक्त स्थानान्तरण $R_1 o R_2$ के हुन्छ ?

a. $R_1 o R_2 [(0,0), \theta - \alpha]$ b. $R_1 o R_2 [(0,0), \theta + \alpha]$

c. $R_1 o R_2 [(0,0), \theta \times \alpha]$ d. $R_1 o R_2 [(0,0), \theta \times \frac{1}{\alpha}]$

(च) यदि विस्थापनहरू $T_1 = \begin{pmatrix}m_1\\n_1\end{pmatrix}$ र $T_2 = \begin{pmatrix}m_2\\n_2\end{pmatrix}$ भए संयुक्त स्थानान्तरण $T_2 o T_1$ कति हुन्छ ?

a. $T_2 o T_1 = \begin{pmatrix}m_1 - m_2\\n_1 - n_2\end{pmatrix}$ b. $T_2 o T_1 = \begin{pmatrix}m_1 + m_2\\n_1 + n_2\end{pmatrix}$

c. $T_2 o T_1 = \begin{pmatrix}m_1 \times m_2\\n_1 \times n_2\end{pmatrix}$ d. $T_2 o T_1 = \begin{pmatrix}m_1 \times n_2\\n_1 \times m_2\end{pmatrix}$

(छ) विस्तार $E_1 [(a, b), K_1]$ र $E_2 [(a, b), K_2]$ को संयुक्त स्थानान्तरण $E_1 o E_2$ के हुन्छ ?

a. $E_1 o E_2 [(0,0), K_1 + K_2]$ b. $E_1 o E_2 [(0,0), (K_1 - K_2)]$

c. $E_1 o E_2 [(0,0), K_1 \times K_2]$ d. $E_1 o E_2 [(0,0), K_1 \times \frac{1}{K_2}]$

2. (क) शीर्षविन्दुहरू A (2, 2), B (6, 2) र C (2, 5) भएको चतुर्भुज ABCD लाई पहिले X-अक्षमा र त्यसपछि Y- अक्षमा परावर्तन गराउँदा संयुक्त स्थानान्तरणद्वारा बन्ने प्रतिबिम्बको निर्देशाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् । वस्तु र प्रतिबिम्बलाई एउटै लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस्

संयुक्त स्थानान्तरण के हुन्छ, लेख्नुहोस् ।

(ख) शीर्षविन्दुहरू A (1,2), B (4, –1) र C (2, 5) भएको त्रिभुजलाई क्रमशः रेखा $x = -3$ र $y = 4$ मा परावर्तन गरिएको छ । उक्त संयुक्त स्थानान्तरणबाट प्राप्त प्रतिबिम्ब ΔA"B"C" र ΔABC लाई एउटै लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

(ग) शीर्षविन्दुहरू A (1, 2), B (4, –1), र C (2, 5) भएको त्रिभुजलाई रेखाहरू $r_1(x = 4)$ र $r_2(x = -1)$ मा लगातार परावर्तन गरिएको छ । दुबै स्थानान्तरणहरूले जनाउने संयुक्त स्थानान्तरण $R_2 oR_1$ पत्ता लगाउनुहोस् । $R_2 oR_1$ द्वारा प्राप्त प्रतिबिम्ब ΔA'B'C' र ΔABC लाई एउटै लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

3. (क) एउटा त्रिभुज ABC का शीर्षविन्दुहरू A (4, 0), B (3, 3) र C (1, –1) छन् । यी विन्दुहरूलाई उद्गमविन्दुको वरिपरि परिक्रमण [(0, 0), 90°] र उही दिशामा परिक्रमण [(0, 0), 180°] बाट सुरु हुने संयुक्त स्थानान्तरणले कुन एकल स्थानान्तरणलाई जनाउँछ ? सोही एकल स्थानान्तरणको प्रयोग गरी ΔA'B'C' को प्रतिबिम्बको निर्देशाङ्कहरू पत्ता लगाउनुहोस् । साथै ΔABC र प्रतिबिम्ब ΔA'B'C' लाई लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

(ख) विन्दुहरू P (1, 2), Q (4, –1) र R (2, 5) एउटा त्रिभुज PQR का शीर्षविन्दुहरू हुन् । यी विन्दुहरूलाई परिक्रमण [(0, 0), –90°] र उही दिशामा परिक्रमण [(0, 0), –180°] बाट हुने संयुक्त स्थानान्तरणले कुन एकले स्थानान्तरणलाई जनाउँछ, लेख्नुहोस् । सोही एकल स्थानान्तरणको प्रयोग गरी बन्ने प्रतिबिम्बहरूको निर्देशाङ्कहरू पत्ता लगाउनुहोस् । दुईओटै त्रिभुजहरूलाई एउटै लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

(ग) यदि R_1 ले उद्गमविन्दुको वरिपरि 90^o मा हुने परावर्तन र R_2 ले उद्गमविन्दुको वरिपरि -270^o मा हुने परावर्तनलाई जनाउँछन् भने संयुक्त स्थानान्तरण $R_2 o R_1$ ले केलाई जनाउँछ ? $R_2 o R_1$ द्वारा शीर्षविन्दुहरू A (–4, 0), B (–6, 2), C (–4, 3) र D (2, 5) भएको चतुर्भुजलाई स्थानान्तरण गर्नुहोस् । प्राप्त प्रतिबिम्ब र वस्तुलाई एउटै लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

(घ) A (3, 0), B (4, 2), C (2, 3), र D (1, 2), छन् । यसलाई उद्गमविन्दुको वरिपरि $+180^o$ मा परिक्रमण गरेपछि प्राप्त प्रतिबिम्बलाई पुनः उद्गमविन्दुको वरिपरि 90^o ले धनात्मक दिशामा परावर्तन गरिएको छ । संयुक्त स्थानान्तरणद्वारा प्राप्त प्रतिबिम्ब चतुर्भुज A'B'C'D' र चतुर्भुज ABCD लाई एउटै लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

4. विन्दुहरू P (2, 1), Q (–1, 4) र R (–2, 2) एउटा त्रिभुज PQR का शीर्षविन्दुहरू हुन् । यदि $T_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ र $T_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ दुईओटा विस्थापन भेक्टर भए,

(क) संयुक्त स्थानान्तरण $T_1 o T_2$ अथवा $T_2 o T_1$ को प्रयोग गरी ΔPQR का निर्देशाङ्कहरूको प्रतिबिम्ब पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) ΔPQR र प्रतिबिम्ब $\Delta P'Q'R'$ लाई एउटै लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

5. एउटा त्रिभुज BUN का शीर्षविन्दुहरू क्रमशः B (5, 3), U (1, 4) र N(2, 1) छन् । यदि दुईओटा विस्थापन भेक्टर $T_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ र $T_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ भए,

(क) संयुक्त स्थानान्तरण $T_1 o T_2$ पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) संयुक्त स्थानान्तरण $T_2 o T_1$ प्रयोग गरी ΔBUN का निर्देशाङ्कहरूको प्रतिबिम्ब पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) ΔBUN र प्रतिबिम्ब $\Delta B'U'N'$ लाई एउटै लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

6. रेखाखण्ड PQ मा P (–3, 5) र Q (7, –4) छन् । यदि E_1 [0, 2] र E_2 = [0, $\frac{3}{2}$] दुईओटा विस्तार भए, रेखाखण्ड PQ लाई $E_1 o E_2$ ले स्थानान्तरण गर्छ भने,

(क) संयुक्त स्थानान्तर $E_1 o E_2$ ले जनाउने विस्तृतीकरणको केन्द्र र विस्तृतीकरणको नापो कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) प्रतिबिम्ब रेखाखण्ड P'Q' का निर्देशाङ्कहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) रेखाखण्ड PQ र प्रतिबिम्ब रेखाखण्ड P'Q' लाई एउटै लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

7. ΔABC का शीर्षविन्दुहरू A (2, 3), B (4, 5) र C(6, 2) छन् । यदि दुईओटा विस्तार E_1 = [(0, 0), 4] र E_2 = [(0, 0), $\frac{1}{2}$] भए,

(क) संयुक्त विस्तृतीकरण $E_2 o E_1$ को विस्तृतीकरणको नापो पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) $E_2 o E_1$ को प्रयोग गरी ΔABC को प्रतिबिम्ब $\Delta A'B'C'$ का निर्देशाङ्कहरू पत्ता लगाउनुहोस्। साथै ΔABC र प्रतिबिम्ब $\Delta A'B'C'$ लाई लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

उत्तर

1. (क) (c) (ख) (c) (ग) (a) (घ) (d) (ङ) (b) (च) (b) (छ) (d)

2. (क) A" (–2, –2), B" (–6, –2), C" (–2, –5) (ख) A" (–7, 6), B" (–10, 9), C" (–8, 3)
(ग) A" (–9, 2), B" (–6, –1), C" (–8, 5)

3. (क) A" (0, –4), B" (3, –3), C" (–1, –1) (ख) P" (2, –1), Q" (–1, –4), R" (5, –2)
(ग) A" (4, 0), B" (6, –2), C" (4, –3), D" (–2, –5) (घ) A" (0, –3), B" (2, –4), C" (3, –2), D" (2, –1)

4. (क) P'(7, 0), Q' (4, 3), R' (3, 1)

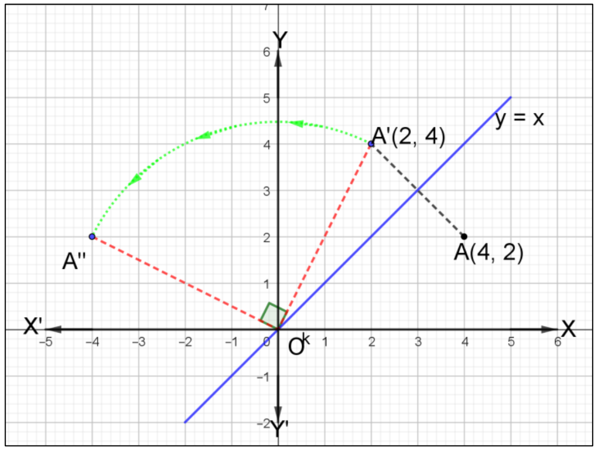
5. (क) $T = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$ (ख) B'(–3, 2), U' (–4, 1), N' (–2, –1) (ग) लेखाचित्र शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

6. (क) E [(0, 0), 3] (ख) P' (–9, 15), Q' (21, –12) (ग) लेखाचित्र शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

7. (क) k = 2 (ख) A' (4, 6), B' (8, 10), C' (12, 4) र लेखाचित्र शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

9.3.2 फरक फरक दुईओटा स्थानान्तरणको संयुक्त स्थानान्तरण
(Combined transformation of Two Different Transformation)

क्रियाकलाप 1



सँगै दिइएको लेखाचित्रमा, विन्दु A (4, 2) लाई $y = x$ मा परावर्तन गर्दा प्राप्त प्रतिबिम्ब विन्दु A' (2, 4) हुन्छ ।

(क) प्रतिबिम्ब A' (2, 4) लाई उद्गमविन्दुको वरिपरि कुन दिशामा परिक्रमण गरिएको छ ?

(ख) सो प्रतिबिम्ब A' (2, 4) लाई कति डिग्रीको कोणमा परिक्रमण गर्दा A" बन्छ ?

(ग) अन्तिम प्रतिबिम्ब A" का निर्देशाङ्कहरू के के छन्, छलफल गर्नुहोस् ।

(घ) दिइएको संयुक्त स्थानान्तरणलाई जनाउने एकल स्थानान्तरण के हुन्छ, छलफल गर्नुहोस् र निष्कर्ष पत्ता लगाउनुहोस् ।

यदि F र G ले कुनै दुईओटा फरक स्थानान्तरणलाई जनाउँछन् भने,

(क) संयुक्त स्थानान्तरण GoF मा पहिले F द्वारा हुने स्थानान्तरणबाट प्राप्त प्रतिबिम्बलाई G बाट हुने स्थानान्तरणले स्थानान्तरण गरी अन्तिम प्रतिबिम्ब पत्ता लगाइन्छ ।

(ख) संयुक्त स्थानान्तरण FoG मा पहिले G द्वारा हुने स्थानान्तरणबाट प्राप्त प्रतिबिम्बलाई F द्वारा हुने स्थानान्तरणले स्थानान्तरण गरी अन्तिम प्रतिबिम्ब पत्ता लगाइन्छ ।

(ग) एकल स्थानान्तरण पत्ता लगाउन सुरुको विन्दुको निर्देशाङ्क र अन्तिम प्रतिबिम्बको निर्देशाङ्कलाई अध्ययन गरी तिनीहरूको सम्बन्धका आधारमा पत्ता लगाइन्छ ।

उदाहरण 1

शीर्षविन्दुहरू A (1, 0), B (2, 1) र C (3, –1) भएको त्रिभुजलाई विस्थापन भेक्टर (T) = $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ले विस्थापन गर्दा प्राप्त हुने प्रतिबिम्बको निर्देशाङ्कहरू पत्ता लगाउनुहोस् । उक्त प्रतिबिम्बलाई फेरि $x = 2$ मा परावर्तन गर्नुहोस् । ΔABC र अन्तिम प्रतिबिम्ब ΔA"B"C" लाई एउटै लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ, ΔABC का शीर्षविन्दुहरू A (1, 0), B (2, 1) र C (3, –1) छन् । विस्थापन भेक्टर (T) = $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ र परावर्तन गर्ने रेखा $x = 2$ छन् ।

सूत्रअनुसार, $P(x,\ y) \xrightarrow{T = \binom{a}{b}} P'(x + a, y + b)$

$A(1, 0) \xrightarrow{T = \binom{1}{2}} A'(1 + 1, 0 + 2) = A'(2, 2)$

$B(2, 1) \xrightarrow{T = \binom{1}{2}} B'(2 + 1, 1 + 2) = B'(3, 3)$

$C(3, -1) \xrightarrow{T = \binom{1}{2}} C'(3 + 1, -1 + 2) = C'(4, 1)$

अत: ΔABC लाई विस्थापन भेक्टर (T) = $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ ले विस्थापन गरेपछि प्राप्त प्रतिबिम्ब $\Delta A'B'C'$ का निर्देशाङ्कहरू A' (2, 2), B' (3, 3) र C' (4, 1) छन् । फेरि, $\Delta A'B'C'$ लाई $x = 2$ मा परावर्तन गर्दा,

$P'(x, y) \xrightarrow{x = h} P''(2 \times h - x,\ y)$

$P'(x, y) \xrightarrow{x = 2} P''(4 - x,\ y)$

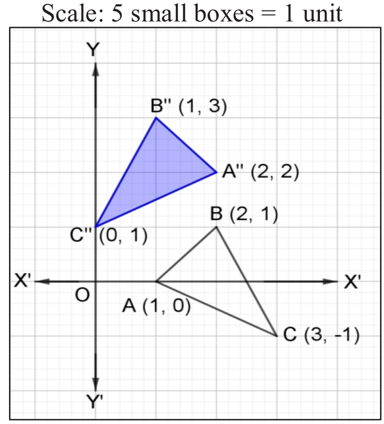
$A'(2, 2) \xrightarrow{x = 2} A''(4 - 2,\ 2) = A''(2, 2)$

$B'(3, 3) \xrightarrow{x = 2} B''(3 - 2,\ 3) = B''(1, 3)$

$C'(4, 1) \xrightarrow{x = 2} C''(4 - 4,\ 1) = C''(0, 1)$

अत: ΔABC र अन्तिम प्रतिबिम्ब $\Delta A''B''C''$ लाई एउटै लेखाचित्रमा प्रस्तुत गरिएको छ ।

Scale: 5 small boxes = 1 unit



उदाहरण 2

E ले केन्द्र (–3, –4,) बाट हुने नापो 2 भएको विस्तृतीकरण र R ले $y = 0$ मा हुने परावर्तनलाई जनाउँछन् । एउटा त्रिभुज ABC का शीर्षविन्दुहरू A (2, 0), B (3, 1) र C (1, 1) छन् ।

(क) संयुक्त स्थानान्तरण EoR ले P(x, y) लाई कुन विन्दुमा स्थानान्तरण गर्छ ?

(ख) त्रिभुज ABC लाई EoR द्वारा स्थानान्तरण गर्नुहोस् । ΔABC र प्राप्त प्रतिबिम्ब $\Delta A'B'C'$ लाई एउटै लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

समाधान

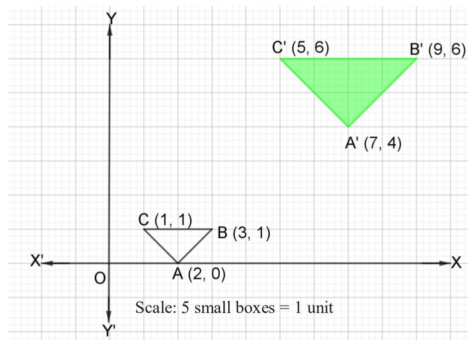
यहाँ, विस्तृतीकरणको केन्द्र, (a, b) = (–3, –4) र विस्तृतीकरणको नापो (k) = 2

R ले $y = 0$ मा हुने परावर्तनलाई जनाउँछ ।

(क) हामीलाई थाहा छ, विस्तृतीकरणको केन्द्र, (a, b) र विस्तृतीकरणको नापो (k) दिएको अवस्थामा

$P(x, y) \xrightarrow{E[(a,b),k]} P'\{k(x-a)+a, k(y-b)+b\}$ र, $y = 0$ मा हुने परावर्तन छ भने,

$P(x, y) \xrightarrow{y=0} P'(x, -y)$



अब, EoR (x, y) = E [R (x, y)]

$= E(x, -y)$

$= [2(x-(-3)) - 3, 2(-y-(-4)) - 4)]$

$= 2(x+3) - 3, 2(-y+4) - 4)$

$= (2x + 6 - 3, -2y + 8 - 4)$

$= (2x + 3, -2y + 4)$

अत: $P(x, y) \xrightarrow{EoR} P'(2x + 3, -2y + 4)$ मा स्थानान्तरण गर्छ ।

(ख) त्यसैले, $A(2, 0) \xrightarrow{EoR} A'(2 \times 2 + 3,\ 2 \times 0 + 4) = A'(4 + 3, 0 + 4) = A'(7, 4)$

$B(3, 1) \xrightarrow{EoR} B'(2 \times 3 + 3, -2 \times 1 + 4) = B'(6 + 3, -2 + 4) = B'(9, 2)$

$C(1, 1) \xrightarrow{EoR} C'(2 \times 1 + 3, -2 \times 1 + 4) = C'(2 + 3, -2 + 4) = C'(5, 2)$

अत: ΔABC र अन्तिम प्रतिबिम्ब ΔA"B"C" लाई माथि एउटै लेखाचित्रमा प्रस्तुत गरिएको छ ।

अभ्यास 9.2.2

1. दिइएका प्रश्नहरूको उपयुक्त विकल्पमा ठिक चिह्न (✓) लगाउनुहोस् :

(क) विन्दु A (4, 2) लाई $y = x$ मा परावर्तन गर्दा प्राप्त प्रतिबिम्ब विन्दु A' (2, 4) लाई उद्गमविन्दुको वरिपरि धनात्मक 90° मा परिक्रमण गराउँदा बन्ने संयुक्त स्थानान्तरणले कुन एकल स्थानान्तरणलाई जनाउँछ ?

a. X अक्षमा परावर्तन   b. Y अक्षमा परावर्तन

c. रेखा $y = x$ परावर्तन   d. रेखा $y = -x$ परावर्तन

(ख) दिइएको सम्बन्धमा $P(x, y)$ को अन्तिम प्रतिबिम्ब $P''(-y, -x)$ बन्छ भने संयुक्त स्थानान्तरणले कुन एकल स्थानान्तरणलाई जनाउँछ ?

$p(x, y) \xrightarrow{R(Y-axis)} P(-x, y) \xrightarrow{R[(0,0),+90^\circ]} P''(-y, -x)$

a. X अक्षमा परावर्तन b. Y अक्षमा परावर्तन

c. रेखा $y = x$ परावर्तन d. रेखा $y = -x$ परावर्तन

(ग) विन्दु A (4, –1) लाई पहिले रेखा $y = x$ मा परावर्तन गर्नुहोस् । प्राप्त प्रतिबिम्ब A' लाई पुनः उद्गमविन्दुको वरिपरि अर्धपरिक्रमण गराउँदा प्राप्त अन्तिम प्रतिबिम्ब A" को निर्देशाङ्कहरू तलका मध्ये कुन हुन्छन् ?

a. A" (–1, 4) b. A" (–1, –4) c. A" (1, –4) d. A" (1, 4)

(घ) विन्दु B (3, 2) लाई पहिले E [(1, 2), –2] बाट विस्तृतीकरण गर्दा प्राप्त प्रतिबिम्बलाई विस्थापन भेक्टर (T) = $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ले विस्थापन गर्दा बन्ने प्रतिबिम्ब B" को निर्देशाङ्कहरू तलका मध्ये कुन हुन्छन् ?

a. B" (–2, 4) b. B" (–2, 3) c. B" (2, –4) d. B" (–3, 2)

2. शीर्षविन्दुहरू A (2, –1), B (2, 1) र C (4, –1) भएको ΔABC लाई पहिले रेखा $y - x = 0$ मा परावर्तन गर्नुहोस् । प्राप्त प्रतिबिम्बलाई पुनः उद्गमविन्दुको वरिपरि अर्धपरिक्रमण गराउनुहोस् । प्राप्त अन्तिम प्रतिबिम्ब ΔA"B"C" र ΔABC लाई एउटै लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

3. (क) शीर्षविन्दुहरू B (1, 2), I (–1, –2) र N (5, 0) भएको ΔBIN लाई विस्थापन भेक्टर (T) = $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ले विस्थापन गर्दा बन्ने प्रतिबिम्बलाई X अक्षमा परावर्तन गरिएको छ । यसरी प्राप्त प्रतिबिम्बहरूका शीर्षविन्दुहरूका निर्देशाङ्कहरू लेखेर ΔBIN र यसका प्रतिबिम्बहरूलाई एउटै लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

(ख) शीर्षविन्दुहरू M (–1, 2), A (2, 1) र N (1, 0) भएको ΔMAN लाई (T) = $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ले विस्थापन गर्दा प्राप्त हुने प्रतिबिम्बको निर्देशाङ्कहरू पत्ता लगाउनुहोस् । उक्त प्रतिबिम्बलाई फेरि रेखा $x = -2$ मा परावर्तन गर्नुहोस् र ΔMAN र ΔM"A"N" लाई एउटै लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

4. (क) विस्थापनलाई T र परिक्रमणलाई R ले जनाइएको छ । A (2, 1), B (2, 4) र C (5, 2) भएको ΔABC लाई $\overrightarrow{AB}$ द्वारा विस्थापन र उद्गमविन्दुको वरिपरि धनात्मक दिशामा 90° परिक्रमण गरिएको छ । संयुक्त स्थानान्तरण RoT अनुसार प्रतिबिम्ब पत्ता लगाउनुहोस् । ΔABC र प्रतिबिम्बलाई एउटै लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

(ख) A (1, 4), B (4, 1) र C (7, 5) शीर्षविन्दुहरू भएको ΔABC लाइ $\overrightarrow{AC}$ द्वारा विस्थापन र उद्गमविन्दुको वरिपरि ऋणात्मक दिशामा 90° परिक्रमण गरिएको छ । विस्थापनलाई T र परिक्रमणलाई R ले जनाइएको छ । संयुक्त स्थानान्तरण RoT अनुसार प्रतिबिम्ब पत्ता लगाउनुहोस् । ΔABC र प्रतिबिम्बलाई एउटै लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

5. (क) शीर्षविन्दुहरू X (2, 3), Y (2, 6) र Z (3, 4) भएको त्रिभुज XYZ लाई $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ले विस्थापन गर्दा बन्ने प्रतिबिम्बलाई E [(0, 0), 2] ले विस्तृतीकरण गरिएको छ । यसरी

प्राप्त प्रतिबिम्बका शीर्षविन्दुहरूका निर्देशाङ्कहरू लेखी यसका प्रतिबिम्बहरू एउटै लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

(ख) ΔMNP का शीर्षविन्दुहरू M (1, 1), N (3, 1), र P (2, 3) को प्रतिबिम्ब उद्गमविन्दुको वरिपरि 90^o धनात्मक परिक्रमणअनुसार पत्ता लगाउनुहोस् । प्राप्त प्रतिबिम्बलाई पुनः (–1, 2) केन्द्र र नापो 2 भएको विस्तारद्वारा विस्तृतीकरण गर्नुहोस् । अन्तिम प्रतिबिम्ब $\Delta M''N''P''$ र वस्तु ΔMNP लाई एउटै लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

6. (क) E ले केन्द्रविन्दु (3,1) र नापो 2 भएको विस्तृतीकरण र R ले $y = x$ मा हुने परावर्तन जनाउँछन् । शीर्षविन्दुहरू A (2, 3), B (4, 5) र C (1, –2) भएको ΔABC लाई संयुक्त स्थानान्तरण EoR द्वारा हुने प्रतिबिम्ब पत्ता लगाउनुहोस् । दुबै चित्र एउटै लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

(ख) G_1 ले केन्द्रविन्दु (3, 4) बाट हुने नापो 2 भएको विस्तृतीकरण र G_2 ले रेखा $y = x$ मा परावर्तन हुने स्थानान्तरण जनाउँछन् । यदि शीर्षविन्दुहरू P (–3, 5), Q (7, 4) र R (6, –2) भएको ΔPQR लाई $G_2 \circ G_1$ द्वारा स्थानान्तरण गर्दा ΔPQR को प्रतिबिम्ब $\Delta P'Q'R'$ मा P', Q' र R' को निर्देशाङ्कहरू पत्ता लगाउनुहोस् । दुबै चित्र एउटै लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

7. (क) त्रिभुज CUT का शीर्षविन्दुहरू C (2, 5), U (–1, 3) र T (4, 1) छन् । ΔCUT लाई उद्गमविन्दुको वरिपरि 90° ऋणात्मक दिशामा परिक्रमण गरी फेरि E [(0, 0), 2] मा विस्तृतीकरण गर्दा बन्ने प्रतिबिम्बहरूको निर्देशाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् । वस्तु र प्रतिबिम्बहरूलाई एउटै लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

(ख) एउटा समानान्तर चर्तुभुज GITA का शीर्षविन्दुहरू G (2, 2), I (6, 2), T (7, 4) र A (3, 4) छन् । सो समानान्तर चर्तुभुज GITA लाई उद्गमविन्दुको वरिपरि 90° ले धनात्मक दिशामा परिक्रमण गरी फेरि E [(0, 0), 3] मा विस्तृतीकरण गर्दा बन्ने प्रतिबिम्बहरूको निर्देशाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् । वस्तु र प्रतिबिम्बहरूलाई एउटै लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

8. (क) त्रिभुज BAT का शीर्षविन्दुहरू क्रमशः B (4, 6), A (2, 2) र T (8, 2) छन् । यसलाई विन्दु P(1, 3) को वरिपरि धनात्मक दिशामा 90° परिक्रमण गरी फेरि X- अक्षमा परावर्तन गरिएको छ । ΔBAT का प्रतिबिम्बहरूको निर्देशाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् । दुबै वस्तु र प्रतिबिम्बहरूलाई उही एउटै लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

(ख) एउटा समानान्तर चर्तुभुज DUCK का शीर्षविन्दुहरू D (2, 3), U (1, 1), C (4, 1) र K (5, 3) छन् । यसलाई विन्दु A (4, 0) को वरिपरि धनात्मक दिशामा 90° परिक्रमण गरी फेरि $x = y$ रेखामा परावर्तन गरिएको छ । समानान्तर चर्तुभुज DUCK का प्रतिबिम्बहरूको निर्देशाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् । साथै वस्तु र प्रतिबिम्बहरूलाई एउटै लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

उत्तर

1. (क) (b) (ख) (d) (ग) (a) (घ) (d) 2. A"(1, –2), B" (–1, –2), C" (1, –4)

3. (क) B' (2, 4), I' (0, 0), N' (6, 2) र B" (2, –4), I" (0, 0), N" (6, –2)

(ख) M' (0, 4), A' (3, 3), N' (2, 2) र M"(–4, 4), A" (–7, 3), N" (–6, 2)

4. (क) A' (–4, 2), B' (–7, 2), C' (–5, 5) (ख) A'(5, –7), B' (2, –10), C' (6, –13)

5. (क) X' (0, 6), Y' (0, 9), Z' (1, 7) र X"(0, 12), Y" (0, 18), Z" (2, 14)

(ख) M' (–1, 1), N' (–1, 3), P' (–3, 2) र M" (–1, 0), N" (–1, 4), P" (–5, 2)

6. (क) A' (3, 2), B' (5, 4), C' (–2, 1) र A" (3, 3), B" (7, 7), C" (–7, 1)

(ख) P' (–9, 6), Q' (11, 4), R' (9,–8) र P" (6, –9), Q" (4, 11), R" (–8, 9)

7. (क) C'(5, –2), U' (3, 1), T' (1, –4) र C"(10, –4), U" (6, 2), T" (2, –8)

(ख) G' (–2, 2), I' (–2, 6), T' (–4, 7), A' (–4, 3) र G" (–6, 6), I" (–6, 18), T" (–12, 21), A" (–12, 9)

8. (क) B' (–2, 6), A' (2, 4), T' (2, 10) र B" (–2, –6), A" (2, –4), T" (2, –10)

(ख) D' (1, –2), U' (3, –3),z C' (3, 0), K' (1, 1) र D" (–2, 1), U" (–3, 3), C" (0, 3), K" (1, 1)

परियोजना कार्य

1. हामीले दैनिक जीवनमा देख्ने वा प्रयोग गर्ने धेरै वस्तुहरूमा विस्थापन र विस्तृतीकरण जस्ता गणितीय धारणाहरू प्रयोग भइरहेका हुन्छन् ।

   (क) तपाईंको घर, विद्यालय वा वरिपरिको वातावरणबाट

   (अ) विस्थापनसँग सम्बन्धित कम्तीमा 2 ओटा उदाहरणहरू दिनुहोस् ।

   (आ) विस्तारसँग सम्बन्धित कम्तीमा 2 ओटा उदाहरणहरू छनोट गर्नुहोस् ।

   (ख) प्रत्येक उदाहरणका लागि

   (अ) वस्तुको सुरुको अवस्थाको चित्र बनाउनुहोस् ।

   (आ) विस्थापन वा विस्तारपछि बनेको नयाँ अवस्थाको चित्र बनाउनुहोस् । विस्थापन भएमा दिशा र दुरी उल्लेख गर्नुहोस् । विस्तार भएमा विस्तारको नाप उल्लेख गर्नुहोस् ।

   (ग) विस्थापन र विस्तारको तुलना गर्नुहोस् ।

2. तपाईंको वरिपरिको दैनिक जीवनमा प्रयोग हुने कुनै एउटा वस्तु वा गतिविधि छान्नुहोस् जहाँ पहिला परावर्तन र त्यसपछि परिक्रमण (वा उल्टो क्रममा) देख्न सकिन्छ ।

   (क) चयन गरिएको वस्तु/गतिविधिको प्रारम्भिक अवस्था, परावर्तनपछि बनेको अवस्था र परावर्तनपछि परिक्रमण गर्दा बनेको अन्तिम अवस्थाको स्पष्ट चित्रसहित देखाउनुहोस् ।

(ख) चित्रमा निम्नलिखित तथ्यहरू स्पष्ट रूपमा देखाउनुहोस् :

परावर्तनको अक्ष (X–axis, Y–axis वा कुनै रेखा)

परिक्रमणको केन्द्र, परिक्रमणको कोण (जस्तै : 90°, 180°)

(ग) परावर्तन र परिक्रमण अलग अलग गर्दा र संयुक्त रूपमा गर्दा वस्तुको अवस्थामा आएको परिवर्तन तुलना गर्नुहोस् । यदि रूपान्तरणको क्रम परिवर्तन गरियो भने (पहिला परिक्रमण र पछि परावर्तन), अन्तिम आकृति उही रहन्छ कि फरक पर्छ, चित्रका आधारमा कारणसहित व्याख्या गर्नुहोस् ।

9.4 मेट्रिक्सको प्रयोग गरी स्थानान्तरण (Transformation Using Matrix)

क्रियाकलाप 1

कुनै विन्दु वा ज्यामितीय चित्रहरूलाई मेट्रिक्स प्रयोग गरी निश्चित दिशा र दुरीमा स्थानान्तरण गर्ने क्रियालाई मेट्रिक्स स्थानान्तरण भनिन्छ । कुनै विन्दु A (x, y) लाई 2×1 मेट्रिक्स $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ले स्थानान्तरण गर्नुहोस् र सोधिएका प्रश्नहरूमा छलफल गर्नुहोस् :

(क) स्थानान्तरण गर्दा बन्ने नयाँ विन्दु A' को निर्देशाङ्कहरू के के हुन्छन् ?

(ख) के विन्दु A (x, y) लाई मेट्रिक्सका रूपमा लेख्न सकिन्छ ?

कुनै विन्दु A (x, y) वा वस्तुका शीर्षविन्दुहरूलाई लाई 2×1 मेट्रिक्सले स्थानान्तरण गर्नु भनेको विस्थापन हो । त्यसैले, A $(x, y) \xrightarrow{\binom{a}{b}}$ A' $(x + a, y + b)$ हुन्छ । अत: A' को निर्देशाङ्कहरू A' $(x + a, y + b)$ बन्छन् । A (x, y) लाई मेट्रिक्सका रूपमा लेख्दा $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ लेखिन्छ । त्यसै गरी, A' को निर्देशाङ्कहरूलाई मेट्रिक्सका रूपमा लेख्नुहोस् ।

9.4.1 एउटा 2 × 1 मेट्रिक्सको प्रयोग गरी स्थानान्तरण

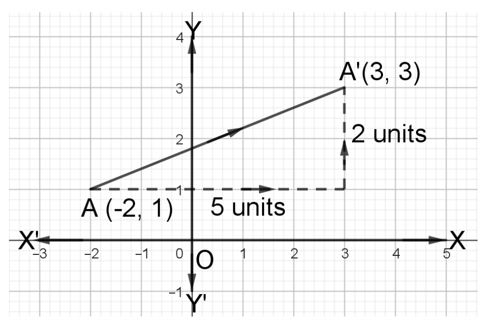
सँगै दिइएको लेखाचित्रमा विन्दु A (–2, 1) लाई विस्थापन भेक्टर $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ ले विस्थापन गर्दा बन्ने प्रतिबिम्ब A' को निर्देशाङ्कहरू A' (–2 + 5, 1 + 2) = A' (3, 3) छन् । यो स्थानान्तरणलाई मेट्रिक्सका रूपमा पनि लेख्न सकिन्छ । जहाँ,

वस्तु (O) = A (–2, 1) = $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

विस्थापन भेक्टर (T) = $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

प्रतिबिम्ब (I) = वस्तु (O) + विस्थापन भेक्टर (T)

प्रतिबिम्ब (I) = $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$



कुनै विन्दु वा ज्यामितीय चित्रका निर्देशाङ्कहरूलाई मेट्रिक्सले स्थानान्तरण गऱ्यो भने त्यस स्थानान्तरणलाई मेट्रिक्स स्थानान्तरण भनिन्छ । स्थानान्तरण भेक्टर (T) = $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ले विन्दु P (x, y) को लहर मेट्रिक्स $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ लाई स्थानान्तरण गर्दा प्रतिबिम्ब P' $(x+ a, y + b)$ बन्छ । यसलाई मेट्रिक्स रूपमा लेख्दा,

प्रतिबिम्ब (I) = $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + a \\ y + b \end{pmatrix}$

अतः प्रतिबिम्ब (I) = वस्तु (O) + विस्थापन भेक्टर

9.4.2 एउटा 2 × 2 मेट्रिक्सको प्रयोग गरी स्थानान्तरण

मानौं, एउटा 2 × 2 मेट्रिक्स (M) = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ हो । कुनै एउटा विन्दु P (x, y) लाई लहर मेट्रिक्सको रूपमा लेख्दा $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ हुन्छ । यदि दिइएको लहर मेट्रिक्सको अगाडिबाट 2 × 2 मेट्रिक्सले गुणा गऱ्यो भने मानौं, अर्को एउटा लहर मेट्रिक्स $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ बन्छ, जस्तै :

M $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$

अथवा, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$

अथवा, $\begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$

जहाँ, $x_1 = ax + by$ र $y_1 = cx + dy$

अतः यदि 2 × 2 मेट्रिक्स $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ले P (x, y) को मेट्रिक्स रूप $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ लाई स्थानान्तरण गर्दा प्रतिबिम्बको निर्देशाङ्क $(ax + by, cx + dy)$ बन्छ ।

(क) X- अक्षमा हुने परावर्तनलाई जनाउने 2 × 2 स्थानान्तरण मेट्रिक्स

कुनै विन्दु P (x, y) लाई X- अक्षबाट परावर्तन गऱ्यो भने यसको प्रतिबिम्ब P' $(x, -y)$ बन्छ भने यसलाई जनाउने मेट्रिक्स कसरी पत्ता लगाउन सकिन्छ ? के यो 2 × 2 क्रमको मात्र हुन्छ ? किन सो मेट्रिक्स 2 × 1 हुँदैन, छलफल गर्नुहोस् ।

मानौं, विन्दु P (x, y) लाई X- अक्ष (y = 0) मा परावर्तन गराउँदा प्राप्त हुने प्रतिबिम्ब P' (x', y') हो । यसलाई यसरी पनि लेख्न सकिन्छ,

$P(x, y) \xrightarrow{y = 0} P'(x', y')$

तर, वास्तविक रूपमा, विन्दु P (x, y) लाई X- अक्ष (y = 0) मा परावर्तन गराउँदा

$P(x, y) \xrightarrow{y = 0} P'(x, -y)$ हुन्छ ।

माथि P' का निर्देशाङ्कलाई तुलना गर्दा प्रतिबिम्ब

$P'(x', y') = P'(x, -y)$

$x' = x = 1 \times x + 0 \times y$.........(i)

$y' = -y = 0 \times x + (-1) \times y$.........(ii)

समीकरण (i) र (ii) लाई मेट्रिक्स रूपमा व्यक्त गर्दा

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

अतः X- अक्ष $(y = 0)$ मा हुने परावर्तनले प्रतिनिधित्व गर्ने आवश्यक 2×2 स्थानान्तरण मेट्रिक्स $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ हो । जहाँ, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ लाई क्रमशः प्रतिबिम्ब मेट्रिक्स, स्थानान्तरण मेट्रिक्स र वस्तु मेट्रिक्स भनिन्छ ।

त्यसैले प्रतिबिम्ब मेट्रिक्स (I) = स्थानान्तरण मेट्रिक्स (M) × वस्तु मेट्रिक्स (O) लेख्न सकिन्छ ।

विचारणीय प्रश्न : यसै गरी, Y- अक्ष $(x = 0)$ मा हुने परावर्तन, रेखा $y = x$ मा हुने परावर्तन, रेखा $y = -x$ मा हुने परावर्तन, रेखा $x = h$ मा हुने परावर्तन, र रेखा $y = k$ मा हुने परावर्तनले प्रतिनिधित्व गर्ने आवश्यक 2×2 स्थानान्तरण मेट्रिक्स के के होलान् ?

(ख) उद्गमविन्दुको वरिपरि धनात्मक दिशामा 90° को परिक्रमणलाई जनाउने 2×2 स्थानान्तरण मेट्रिक्स

कुनै विन्दु P (x, y) लाई उद्गमविन्दुको वरिपरि धनात्मक 90° मा परिक्रमण गऱ्यो भने यसको प्रतिबिम्ब P' $(-y, x)$ बन्छ भने यसलाई जनाउने मेट्रिक्स कसरी पत्ता लगाउन सकिन्छ, छलफल गर्नुहोस् ।

मानौं, विन्दु P (x, y) लाई उद्गमविन्दुको वरिपरि (+90°) हुने परिक्रमण गराउँदा प्राप्त हुने प्रतिबिम्ब P' (x', y') हो । यसलाई यसरी पनि लेख्न सकिन्छ,

$$P(x, y) \xrightarrow{[(0,0), +90^\circ]} P'(x', y')$$

तर, वास्तविक रूपमा, विन्दु P (x, y) लाई उद्गमविन्दुको वरिपरि (+90°) हुने परिक्रमण गराउँदा

$P(x, y) \xrightarrow{[(0,0), +90^\circ]} P'(-y, x)$ हुन्छ ।

माथि P' का निर्देशाङ्कलाई तुलना गर्दा प्रतिबिम्ब

$P'(x', y') = P'(-y, x)$

$x' = -y = 0 \times x + (-1) \times y$.........(i)

$y' = x = 1 \times x + 0 \times y$.........(ii)

समीकरण (i) र (ii) लाई मेट्रिक्सका रूपमा व्यक्त गर्दा

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

अतः उद्गमविन्दुको वरिपरि ($+90°$) हुने परिक्रमणले प्रतिनिधित्व गर्ने आवश्यक 2×2 स्थानान्तरण मेट्रिक्स $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ हो ।

विचारणीय प्रश्न : उद्गमविन्दुको वरिपरि ऋणात्मक दिशामा ($-90°$) को परिक्रमण, $180°$ को परिक्रमणले प्रतिनिधित्व गर्ने आवश्यक 2×2 स्थानान्तरण मेट्रिक्स के के होलान्, छलफल गर्नुहोस् ।

(ग) विस्तृतीकरणको केन्द्र (0, 0) र विस्तृतीकरणको नापो (k) जनाउने 2×2 स्थानान्तरण मेट्रिक्स

कुनै विन्दु P (x, y) लाई विस्तृतीकरणको केन्द्र (0, 0) र नापो (k) लिई विस्तार गऱ्यो भने यसको प्रतिबिम्ब P' (kx, ky) बन्छ । यसलाई जनाउने मेट्रिक्स कसरी पत्ता लगाउन सकिन्छ, छलफल गर्नुहोस् ।

मानौँ, विन्दु P (x, y) लाई विस्तृतीकरणको केन्द्र (0, 0) र नापो (k) लिई विस्तार गराउँदा प्राप्त हुने प्रतिबिम्ब P' (x', y') हो । यसलाई यसरी पनि लेख्न सकिन्छ,

$$P(x, y) \xrightarrow{E[(0,0), k]} P'(x', y')$$

तर वास्तविक रूपमा, विन्दु P (x, y) लाई विस्तृतीकरणको केन्द्र (0, 0) र नापो (k) लिई विस्तार गराउँदा

$$P(x, y) \xrightarrow{E[(0,0), k]} P'(kx, ky) \text{ हुन्छ ।}$$

माथि P' का निर्देशाङ्कलाई तुलना गर्दा प्रतिबिम्ब

$P'(x', y') = P'(kx, ky)$

$x' = kx = k \times x + 0 \times y$.........(i)

$y' = ky = 0 \times x + k \times y$.........(ii)

समीकरण (i) र (ii) लाई मेट्रिक्सका रूपमा व्यक्त गर्दा

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

अतः विस्तृतीकरणको केन्द्र (0, 0) र नापो (k) बाट विस्तार गराउँदा आवश्यक 2×2 स्थानान्तरण मेट्रिक्स $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ हो । जहाँ, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ लाई क्रमशः प्रतिबिम्ब मेट्रिक्स, स्थानान्तरण मेट्रिक्स र वस्तु मेट्रिक्स भनिन्छ ।

फरक फरक स्थानान्तरणमा प्रयोग गरीने 2×2 मेट्रिक्सहरूको विवरण

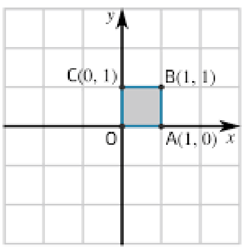
2×2 स्थानान्तरण मेट्रिक्समा प्रतिबिम्ब मेट्रिक्स $(I)_{2 \times n}$= स्थानान्तरण मेट्रिक्स $(M)_{2 \times 2}$ $\times$ वस्तु मेट्रिक्स $(O)_{2 \times n}$ लेख्न सकिन्छ । यहाँ 'n' ले वस्तु र प्रतिबिम्बमा भएका शीर्षविन्दुहरूको सङ्ख्यालाई जनाउँछ । 'n' को मान रेखाखण्ड, त्रिभुज र चतुर्भुजका लागि क्रमशः 2, 3 र 4 हुन्छ । फरक फरक

स्थानान्तरणमा प्रयोग गरिने 2×2 मेट्रिक्सहरूको विवरण तल तालिकामा दिइए जस्तै हुन्छ :

क्र.स.	स्थानान्तरण	वस्तु विन्दु	प्रतिबिम्ब विन्दु	2×2 स्थानान्तरण मेट्रिक्स
1	X-अक्षमा हुने परावर्तन	P (x, y)	P' $(x, -y)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
2	Y-अक्षमा हुने परावर्तन	P (x, y)	P' $(-x, y)$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
3	$y = x$ अथवा $y - x = 0$ रेखामा हुने परावर्तन	P (x, y)	P' (y, x)	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
4	$y = -x$ अथवा $y + x = 0$ रेखामा हुने परावर्तन	P (x, y)	P' $(-y, -x)$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
5	R[(0, 0), +90°] अथवा [(0, 0), –270°] मा हुने परिक्रमण	P (x, y)	P' $(-y, x)$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
6	R[(0, 0), –90°] अथवा [(0, 0), + 270°] मा हुने परिक्रमण	P (x, y)	P' $(y, -x)$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
7	R[(0, 0), $\pm$ 180°] मा हुने परिक्रमण	P (x, y)	P' $(-x, -y)$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
8	R[(0, 0), $\pm$ 360°] मा हुने परिक्रमण	P (x, y)	P' (x, y)	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
9	E [(0, 0), k] बाट हुने विस्तृतीकरण	P (x, y)	P' (kx, ky)	$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$

विचारणीय प्रश्न : विस्तृतीकरणको केन्द्र (a, b) र विस्तृतीकरणको नापो k भएको अवस्थामा स्थानान्तरण मेट्रिक्स के हुन्छ, छलफल गर्नुहोस् ।

9.3.3 एकाइ वर्गको परिचय (Introduction of Unit Quare)



एकाइ वर्ग भन्नाले चित्रमा देखाइए जस्तै प्रत्येक भुजाको लम्बाइ 1 एकाइ भएको वर्गलाई जनाउँछ । सँगै दिइएको लेखाचित्रमा OABC एउटा एकाइ वर्ग हो जसका शीर्षविन्दुहरू O (0, 0), A (1, 0), B (1, 1) C (0, 1) छन् ।

यसका शीर्षविन्दुहरूलाई मेट्रिक्सका स्वरूपमा लेख्दा, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ हुन्छ ।

उदाहरण 1

विन्दु A (a, b) लाई विन्दु A $(a + 2, b - 3)$ मा स्थानान्तरण गर्ने 2×1 मेट्रिक्स पत्ता लगाउनुहोस् । सोही मेट्रिक्सको प्रयोग गरी विन्दु (5, 7) को प्रतिबिम्ब पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

मानौँ, 2×1 स्थानान्तरण मेट्रिक्स (M) = $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$

$$A(a, b) \xrightarrow{(T) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}} A'(a + p, b + q)$$

दिइएको,

$$A(a, b) \xrightarrow{(T) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}} A'(a + 2, b - 3)$$

क्रमागत सदस्यहरूको मान बराबर गर्दा,

अथवा, $a + 2 = a + p,$

$\therefore\ p = 2$

त्यसै गरी, $b - 3 = b + q$

$\therefore\ q = -3$

अतः 2×1 मेट्रिक्स (M) = $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

हामीलाई थाहा छ, प्रतिबिम्ब (I) = स्थानान्तरण मेट्रिक्स (TM) + वस्तु (O)

प्रतिबिम्ब (I) = $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$

अतः (5, 7) को प्रतिबिम्ब $\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$ हो ।

उदाहरण 2

मेट्रिक्स $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ले प्रतिनिधित्व गर्ने स्थानान्तरण कुन हो, पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ

दिइएको स्थानान्तरण मेट्रिक्स, (TM) = $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ मानौँ, वस्तु (O) = $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

हामीलाई थाहा छ, प्रतिबिम्ब (I) = स्थानान्तरण मेट्रिक्स (TM) $\times$ वस्तु (O)

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0)x + (-1)y \\ (-1)x + (0)y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix}$$

अतः $P(x, y) \times P'(-y, -x)$

त्यसैले, दिइएको मेट्रिक्स $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ले प्रतिनिधित्व गर्ने स्थानान्तरण $y = -x$ मा हुने परावर्तन हो ।

उदाहरण 3

मेट्रिक्स $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ले कुन स्थानान्तरणलाई प्रतिनिधित्व गर्छ । मेट्रिक्स प्रयोग गरेर विन्दु A (6, –2) को प्रतिबिम्ब पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ

पहिलो अवस्थाअनुसार, दिइएको स्थानान्तरण मेट्रिक्स, (TM) = $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

मानौँ, वस्तु (O) = $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

हामीलाई थाहा छ, प्रतिबिम्ब (I) = स्थानान्तरण मेट्रिक्स (TM) × वस्तु (O)

$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad = \begin{pmatrix} 0 \times x + (-1)y \\ 1 \times x + (0)y \end{pmatrix} \quad = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$

अतः P $(x, y) \times$ P'$(-y, x)$

त्यसैले, दिइएको मेट्रिक्स $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ले प्रतिनिधित्व गर्ने स्थानान्तरण उद्गमविन्दुको वरिपरि $(+90°)$ को परिक्रमणलाई जनाउँछ ।

दोस्रो अवस्थाअनुसार, दिइएको विन्दु A (6, –2) लाई मेट्रिक्सका रूपमा लेख्दा $\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$

प्रतिबिम्ब (I) $= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$

प्रतिबिम्ब (I) = $\begin{pmatrix} 0 \times 6 + (-1)(-2) \\ 1 \times 6 + 0 \times (-2) \end{pmatrix}$

प्रतिबिम्ब (I) = $\begin{pmatrix} 0 + 2 \\ 6 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

अतः विन्दु A (6, –2) को प्रतिबिम्ब A'(2, 6) हो ।

उदाहरण 4

रेखा $y = -x$ मा हुने परावर्तनले प्रतिनिधित्व गर्ने 2×2 स्थानान्तरण मेट्रिक्स पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

मानौँ, विन्दु P (x, y) लाई रेखा $y = -x$ मा परावर्तन गराउँदा प्राप्त हुने प्रतिबिम्ब P' (x', y') हो । यसलाई यसरी पनि लेख्न सकिन्छ,

P $(x, y) \xrightarrow{y = -x}$ P' (x', y')

तर, वास्तविक रूपमा, विन्दु P (x, y) लाई रेखा $y = -x$ मा परावर्तन गराउँदा

P $(x, y) \xrightarrow{y = -x}$ P' $(-y, -x)$ हुन्छ ।

माथि P' का निर्देशाङ्कलाई तुलना गर्दा प्रतिबिम्ब

$P'(x', y') = P'(-y, -x)$

$x' = -y = 0 \times x + (-1) \times y ....(i)$

$y' = -x = (-1) \times x + 0 \times y ....(ii)$

समीकरण (i) र (ii) लाई मेट्रिक्स रूपमा व्यक्त गर्दा

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

अतः रेखा $y = -x$ मा हुने परावर्तनले प्रतिनिधित्व गर्ने आवश्यक 2×2 स्थानान्तरण मेट्रिक्स $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ हो ।

उदाहरण 5

यदि विन्दु $P(a, b)$ लाई $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ ले स्थानान्तरण गर्दा $P'(-10, -8)$ बन्छ भने a र b को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

$P = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

स्थानान्तरण मेट्रिक्स, (TM) = $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

प्रतिबिम्ब (P') = $\begin{pmatrix} -10 \\ -8 \end{pmatrix}$

हामीलाई थाहा छ,

प्रतिबिम्ब (P') = स्थानान्तरण मेट्रिक्स (TM) × विन्दु (P)

अथवा, $\begin{pmatrix} -10 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

अथवा, $\begin{pmatrix} -10 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2b \\ -2a \end{pmatrix}$

सङ्गति सदस्यहरूको मान बराबर गर्दा,

अथवा, $-10 = -2b, \times\ b = 5$

अथवा, $-8 = -2a, \times\ a = 4$

अतः $a = 4$ र $b = 5$

उदाहरण 6

त्रिभुज PQR का शीर्षविन्दुहरू P (4, 3), Q (6, 4) र R (8, 1) लाई 2×2 मेट्रिक्स $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ स्थानान्तरण गरी प्रतिबिम्ब $\Delta P'Q'R'$ का निर्देशाङ्कहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

त्रिभुज PQR का शीर्षविन्दुहरू P (4, 3), Q (6, 4) र R (8, 1) छन् । 2 × 2 मेट्रिक्स $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ छन् ।

त्रिभुज PQR का शीर्षविन्दुहरूलाई मेट्रिक्सका रूपमा लेख्दा, वस्तु (O) = $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

स्थानान्तरण मेट्रिक्स, (TM) = $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

हामीलाई थाहा छ, प्रतिबिम्ब (I) = स्थानान्तरण मेट्रिक्स (TM) × वस्तु (O)

प्रतिबिम्ब (I) $= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1\times4+3\times3 & 1\times6+3\times4 & 1\times8+3\times1 \\ 0\times4+2\times3 & 0\times6+2\times4 & 0\times8+2\times1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 4+9 & 6+12 & 8+3 \\ 0+6 & 0+8 & 0+2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 13 & 18 & 11 \\ 6 & 8 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 13 & 18 & 11 \\ 6 & 8 & 2 \end{pmatrix}$

अतः प्रतिबिम्ब ΔP'Q'R' का निर्देशाङ्कहरू P'(13, 6), Q'(18, 8) र R'(11, 2) छन् ।

उदाहरण 7

शीर्षविन्दुहरू A (1, 2), B (4, 1) र C (2, 5) भएको त्रिभुज ABC लाई प्रतिबिम्ब ΔA'B'C' का निर्देशाङ्कहरू A' (5, 2), B' (6, 1) र C' (12, 5) मा रूपान्तरण गर्ने 2 × 2 स्थानान्तरण मेट्रिक्स पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

मानौँ, 2 × 2 स्थानान्तरण मेट्रिक्स (M) = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

त्रिभुज ABC का निर्देशाङ्कहरू शीर्षविन्दुहरू A (1, 2), B (4, 1) र C (2, 5) लाई मेट्रिक्सको स्वरूपमा लेख्दा,

वस्तु (O) = $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

प्रतिबिम्ब ΔA'B'C' का निर्देशाङ्कहरू A' (5, 2), B' (6, 1) र C' (12, 5) लाई मेट्रिक्सको स्वरूपमा लेख्दा,

प्रतिबिम्ब (I) = $\begin{pmatrix} 5 & 6 & 12 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 & 12 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

हामीलाई थाहा छ, प्रतिबिम्ब (I) = स्थानान्तरण मेट्रिक्स (TM) × वस्तु (O)

अथवा, $\begin{pmatrix} 5 & 6 & 12 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

अथवा, $\begin{pmatrix} 5 & 6 & 12 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2b & 4a+b & 2a+5b \\ c+2d & 4c+d & 2c+5d \end{pmatrix}$

क्रमागत सदस्यहरूको मान बराबर गर्दा,

$a + 2b = 5$

अथवा, $a = 5 - 2b$ ....(i)

$4a + b = 6$

अथवा, $4(5 - 2b) + b = 6$ ($\because$ समीकरण (i) बाट)

अथवा, $20 - 8b + b = 6$

अथवा, $-7b = 6 - 20$

अतः, $b = \frac{-40}{-7} = 2$

समीकरण (i) मा $b = 2$ राख्दा,

$a = 5 - 2b = 5 - 2 \times 2 = 1$

फेरि, $c + 2d = 2$

अथवा, $c = 2 - 2d$ .... (ii)

र $4c + d = 1$

अथवा, $4(2 - 2d) + d = 1$ ($\because$ समीकरण (ii) बाट)

अथवा, $8 - 8d + d = 1$

अथवा, $-7d = 1 - 8$

$\therefore d = 1$

समीकरण (ii) बाट $c = 2 - 2 \times 1 = 0$

अतः 2×2 स्थानान्तरण मेट्रिक्स, $(M) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

उदाहरण 8

शीर्षविन्दुहरू A (2, 3), B (4, 3), C (4, 5) र D (2, 5) भएको वर्ग ABCD लाई 2×2 मेट्रिक्सले स्थानान्तरण गर्दा शीर्षविन्दुहरू A' (3, 2), B' (3, 4) C' (5, 4) र D' (5, 2) भएको वर्ग A'B'C'D' हुन्छ भने सो 2×2 स्थानान्तरण मेट्रिक्स पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

मानौँ, 2×2 स्थानान्तरण मेट्रिक्स $(M) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

वर्ग ABCD का शीर्षविन्दुहरू A (2, 3), B (4, 3), C (4, 5) र D (2, 5) लाई मेट्रिक्सको स्वरूपमा लेख्दा,

वस्तु $(O) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 5 & 5 \end{pmatrix}$

प्रतिबिम्ब वर्ग A'B'C'D' का शीर्षविन्दुहरू A' (3, 2), B' (3, 4) C' (5, 4) र D' (5, 2) लाई मेट्रिक्सको स्वरूपमा लेख्दा,

प्रतिबिम्ब (I) = $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 & 5 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

हामीलाई थाहा छ, प्रतिबिम्ब (I) = स्थानान्तरण मेट्रिक्स (TM) × वस्तु (O)

अथवा, $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 & 5 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 5 & 5 \end{pmatrix}$

अथवा, $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 & 5 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+3b & 4a+3b & 4a+5b & 2a+5b \\ 2c+3d & 4c+3d & 4c+5d & 2c+5d \end{pmatrix}$

क्रमागत सदस्यहरूको मान बराबर गर्दा,

$2a + 3b = 3$

अथवा, $a = \frac{3-3b}{2}$..................(i)

$4a + 3b = 3$

अथवा, $4\left(\frac{3-3b}{2}\right) + 3b = 3$ (∵ समीकरण (i) बाट))

अथवा, $6 - 6b + 3b = 3$

अथवा, $-3b = 3 - 6$

अथवा, $-3b = -3$

अतः, $b = 1$

समीकरण (i) मा $b = 1$ राख्दा, $a = \frac{3-3\times 1}{3} = 0$

फेरि, $2c + 3d = 2$

अथवा, $c = \frac{2-3d}{2}$ .... (ii)

र $4c + 3d = 4$

अथवा, $4\left(\frac{2-3d}{2}\right) + 3d = 4$ (∵ समीकरण (ii) बाट)

अथवा, $4 - 6d + 3d = 4$

अथवा, $-3d = 4 - 4$

$\therefore d = 0$

समीकरण (ii) बाट $c = = \frac{2-3\times 0}{2} = 1$

अतः 2 × 2 स्थानान्तरण मेट्रिक्स, (M) = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

उदाहरण 9

रेखा $y = x$ मा परावर्तन गरेपछि उद्गमविन्दुको वरिपरि 90° धनात्मक दिशामा परिक्रमण गराउँदा हुने संयुक्त स्थानान्तरण रेखा Y - अक्षमा हुने परावर्तनसँग समतुल्य हुन्छ भनी परीक्षण गर्नुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

रेखा $y = x$ मा परावर्तन हुँदा जनाउने मेट्रिक्स, मानौँ $(A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

उद्गमविन्दुको वरिपरि 90° धनात्मक दिशामा परिक्रमण गराउँदा जनाउने मेट्रिक्स,

मानौँ $(B) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

रेखा Y- अक्षमा हुने परावर्तन हुँदा जनाउने मेट्रिक्स, मानौँ $(C) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

अब, $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 0 \times 0 + 1 \times 1 & 0 \times (-1) + 1 \times 0 \\ 1 \times 0 + 0 \times 1 & 1 \times (-1) + 0 \times 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 + 1 & 0 + 0 \\ 0 + 0 & -1 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

अभ्यास 9.3

1. दिइएका प्रश्नको उपयुक्त विकल्पमा ठिक चिह्न (✓) लगाउनुहोस् :

(क) मेट्रिक्स $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ले कुन स्थानान्तरणलाई जनाउँछ ?

a. X अक्षमा परावर्तन

b. Y अक्षमा परावर्तन

c. रेखा $y = x$ परावर्तन

d. रेखा $y = -x$ परावर्तन

(ख) पहिलो चतुर्थांशमा पर्ने एकाइ वर्गले जनाउने मेट्रिक्स तलका मध्ये कुन हो ?

a. $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(ग) X- अक्षको परावर्तनसँग सम्बन्धित 2×2 मेट्रिक्स कुन हो ?

a. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(घ) उद्गमविन्दुको वरिपरि हुने धनात्मक 90° सँग सम्बन्धित 2×2 मेट्रिक्स कुन हो ?

a) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

2. एकाइ वर्ग र मेट्रिक्स स्थानान्तरणलाई परिभाषित गर्नुहोस् ।

3. **विन्दु A $(-4, 6)$ लाई दिइएका मेट्रिक्सहरूद्वारा स्थानान्तरण गर्नुहोस् :**

(क) $\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$ (ख) $\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}$ (ग) $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ (घ) $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

4. (क) विन्दु (x, y) लाई $(2x + y, 3x + 4y)$ मा स्थानान्तरण गर्ने 2×2 मेट्रिक्स पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) विन्दु (x, y) लाई $(x - 2y, 2x - 3y)$ मा स्थानान्तरण गर्ने मेट्रिक्स पत्ता लगाउनुहोस् ।

5. (क) रेखा खण्ड PQ का निर्देशाङ्कहरू P $(3, 4)$ र Q $(8, 4)$ छन् । PQ लाई मेट्रिक्स $\begin{pmatrix}3 & 2\\1 & 1\end{pmatrix}$ ले स्थानान्तरण गर्दा प्राप्त प्रतिबिम्बका निर्देशाङ्कहरू लेख्नुहोस् ।

(ख) शीर्षविन्दुहरू A $(2, 3)$, B $(2, 6)$, C $(5, 2)$, र D $(5, 6)$ भएको एउटा आयतलाई 2×2 मेट्रिक्स $\begin{pmatrix}1 & 0\\2 & 1\end{pmatrix}$ ले स्थानान्तरण गर्दा प्रतिबिम्ब चतुर्भुज A'B'C'D' प्राप्त हुन्छ । सो प्रतिबिम्ब चतुर्भुज A', B', C' र D' का निर्देशाङ्कहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) एकाइ वर्ग $\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 0\\0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ लाई 2×2 मेट्रिक्स $\begin{pmatrix}3 & 2\\1 & 5\end{pmatrix}$ ले स्थानान्तरण गर्दा चतुर्भुज O'A'B'C' प्राप्त हुन्छ । सो चतुर्भुज O'A'B'C' का निर्देशाङ्कहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

6. (क) एकाइ वर्ग $\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 0\\0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ लाई समानान्तर चतुर्भुज $\begin{pmatrix}0 & 3 & 4 & 1\\0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ मा स्थानान्तरण गर्ने 2×2 मेट्रिक्स पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) एकाइ वर्ग $\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 0\\0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ लाई समानान्तर चतुर्भुज $\begin{pmatrix}0 & 3 & 4 & 1\\0 & 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$ मा स्थानान्तरण गर्ने एउटा 2×2 स्थानान्तरण मेट्रिक्स पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) एकाइ वर्गलाई समानान्तर चतुर्भुज $\begin{pmatrix}0 & 2 & 5 & 3\\0 & 3 & 4 & 1\end{pmatrix}$ मा स्थानान्तरण गर्ने एउटा 2×2 स्थानान्तरण मेट्रिक्स पत्ता लगाउनुहोस् ।

7. (क) उद्गमविन्दुको वरिपरि $-90°$ मा परिक्रमण गरी रेखा $x = 0$ मा परावर्तन गर्दा हुने संयुक्त स्थानान्तरण रेखा $y = -x$ मा हुने परावर्तनसँग समतुल्य हुन्छ भनी मेट्रिक्स स्थानान्तरणद्वारा प्रमाणित गर्नुहोस् ।

(ख) मेट्रिक्स स्थानान्तरण प्रयोग गरी उद्गमविन्दुको वरिपरि $+90°$ धनात्मक दिशामा परिक्रमण गरी Y- अक्षमा परावर्तन गर्दा हुने संयुक्त स्थानान्तरण रेखा $y = x$ मा परावर्तनसँग समतुल्य हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

उत्तर

1. (क) (d) (ख) (c) (ग) (a) (घ) (b) 2. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

3. (क) $(-1, 6)$ (ख) $(2, 6)$, (ग) $(-1, 8)$ (घ) $\left(-\frac{7}{2}, \frac{19}{3}\right)$ 4. (क) $\begin{bmatrix}2 & 1\\3 & 4\end{bmatrix}$

(ख) $\begin{bmatrix}1 & -2\\ 2 & -3\end{bmatrix}$	5. क) P' (17, 7), Q' (32, 12)	(ख) A' (2, 7), B' (2, 10), C' (5, 12) D' (5, 16)
(ग) O' (0, 0), A' (3, 1), B' (5, 6) C' (2, 5)		
6. (क) $\begin{bmatrix}3 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$	(ख) $\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$	(ग) $\begin{bmatrix}2 & 3\\ 3 & 1\end{bmatrix}$
7. (क) र (ख) शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।		

परियोजना कार्य

कुनै एउटा त्रिभुजाकार आकृतिको टुक्रालाई लेखाचित्रमा राखी उक्त त्रिभुजका शीर्षविन्दुका निर्देशाङ्कहरू पत्ता लगाउनुहोस् । उक्त त्रिभुजलाई फरक फरक कुनै चारओटा 2×2 मेट्रिक्सद्वारा स्थानान्तरण गर्नुहोस् । यसरी स्थानान्तरणबाट प्राप्त प्रतिबिम्बहरूलाई लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् । उक्त लेखाचित्रबाट ती त्रिभुजहरू काट्नुहोस् । वस्तु र प्रतिबिम्बहरूलाई एउटै चार्टपेपरमा टाँसी आफूले गरेको काम कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

मिश्रित अभ्यास - विषयक्षेत्रगत

1. कुनै वृत्त विन्दुहरू (–2, 0) र (0, –2) भएर जान्छ र केन्द्रविन्दु सीधा रेखा $2x - 3y + 1 = 0$ मा पर्छ भने,

   (क) साङ्किक क्षेत्रका आधारमा वृत्तलाई परिभाषित गर्नुहोस् ।

   (ख) वृत्तको केन्द्रविन्दुको निर्देशाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (ग) वृत्तको केन्द्रविन्दु भएर जाने र रेखा $2x - 3y + 1 = 0$ मा लम्ब हुने रेखाको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

2. विन्दुहरू P (2, –3) र Q (–4, 9) भएर जाने एउटा रेखाखण्ड PQ छ भने,

   (क) रेखा PQ को समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (ख) रेखा PQ सँग समानान्तर हुने र विन्दु M (–1, 1) भएर जाने रेखाको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (ग) रेखा PQ सँग लम्ब हुने र विन्दु N (1, 3) भएर जाने रेखाको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (घ) विस्थापन भेक्टर PQ ले विन्दुहरू P (2, –3) र Q (–4, 9) लाई स्थानान्तरण गर्दा बन्ने प्रतिबिम्ब P' र Q' का निर्देशाङ्कहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

3. एउटा सोलीले बनाएको शीर्षकोण 70° छ । सो सोलीलाई एउटा समतल सतहले प्रतिच्छेदन गर्दा पाराबोला (parabola) बन्छ भने,

(क) दीर्घवृत्तलाई परिभाषित गर्नुहोस् ।

(ख) सो सोलीको अक्ष र समतल सतहबिचको कोण कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

4. एउटा वृत्तको समीकरण $4x^2 + 4y^2 - 24x - 20y - 3 = 0$ छ भने,

(क) कुनै समतल सतहले एउटा सोलीलाई आधारसँग समानान्तर हुने गरी काट्दा कुन साङ्किक बन्छ, लेख्नुहोस् ।

(ख) वृत्तको केन्द्रविन्दु र अर्धव्यास पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) यदि सो वृत्तको एउटा व्यासको एक छेउ (1, 2) भए व्यासको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

5. एउटा वृत्तको समीकरण $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ छ भने,

(क) साङ्किक क्षेत्रका आधारमा वृत्तलाई परिभाषित गर्नुहोस् ।

(ख) वृत्तको केन्द्रविन्दु पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) यदि सो वृत्तको एउटा व्यासको एक छेउ (1, 2) र व्याससँग लम्ब हुने र विन्दु B (–3, 1) भएर जाने रेखाको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

6. यदि R_1 ले X- अक्षमा हुने परावर्तन र R_2 ले Y- अक्षमा हुने परावर्तनलाई जनाउँछ । विन्दुहरू A (1, 5), B (5, 1) र C (8, 3) त्रिभुज ABC का निर्देशाङ्कहरू हुन् भने,

(क) त्रिभुज ABC का भुजाहरू AB र BC का समीकरणहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) संयुक्त स्थानान्तरण R_1oR_2 ले कुन एकल स्थानान्तरण जनाउँछ ?

(ग) सो एकल स्थानान्तरणको प्रयोग गरी ΔABC को प्रतिबिम्ब ΔA'B'C' पत्ता लगाउनुहोस् ।

(घ) ΔABC र प्रतिबिम्ब ΔA'B'C' लाई एउटै लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

7. P (1, 2), Q (5, 2) र R (1, 5) त्रिभुज PQR का निर्देशाङ्कहरू हुन् भने,

(क) X- अक्षमा हुने परावर्तनलाई जनाउने स्थानान्तरण मेट्रिक्स लेख्नुहोस् ।

(ख) मेट्रिक्स $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ले ΔPQR लाई स्थानान्तरण गर्दा प्राप्त हुने प्रतिबिम्बका निर्देशाङ्कहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) ΔPQR को शीर्षविन्दु P बाट QR मा खिचिएको लम्ब PS को समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

8. M (–2, 2), U (2, 2) र N (2, 8) शीर्षविन्दुहरू भएको त्रिभुज MUN लाई स्थानान्तरण भेक्टर $T_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ र $T_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ द्वारा स्थानान्तरण गरिएको छ भने,

(क) संयुक्त स्थानान्तरण T_1oT_2 पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) संयुक्त स्थानान्तरण T_1oT_2 को प्रयोग गरी ΔMUN को प्रतिबिम्ब ΔM'U'N' का निर्देशाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) ΔMUN र प्रतिबिम्ब ΔM'U'N' लाई एउटै लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

9. यदि R_1 ले $y = x$ रेखामा हुने परावर्तन र R_2 ले $x = 0$ रेखामा हुने परावर्तनलाई जनाउँछ । त्रिभुज ABC का निर्देशाङ्कहरू A (3, 2), B (1, 2) र C (2, 3) छन् भने,
   (क) संयुक्त स्थानान्तरण R_1oR_2 ले कुन एकल स्थानान्तरणलाई जनाउँछ ?
   (ख) सो एकल स्थानान्तरणको प्रयोग गरी ΔABC को प्रतिबिम्ब ΔA'B'C' पत्ता लगाउनुहोस् ।
   (ग) ΔABC र प्रतिबिम्ब ΔA'B'C' लाई एउटै लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।
   (घ) शीर्षविन्दु A (3, 2) बाट BC मा खिचिएको उचाइ AD को समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

10. B (3, 2), U (1, –1) र T (5, –5) त्रिभुज BUT का शीर्षविन्दुहरू हुन् भने,
   (क) यदि दुई सिधा रेखाहरूका झुकावहरू क्रमशः m_1 र m_2 छन् र तिनीहरूबिचको कोण θ भए m_1, m_2 र θ को सम्बन्ध लेख्नुहोस् ।
   (ख) गुरुत्वकेन्द्र G बाट जाने र भुजा UT सँग समानान्तर हुने रेखाको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।
   (ग) मेट्रिक्स $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ले ΔBUT लाई स्थानान्तरण गर्दा प्राप्त हुने प्रतिबिम्ब ΔB'U'T' का निर्देशाङ्कहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

उत्तर

1. (क) शिक्षकलाई देखाउनुहोस् । (ख) (1, 1) (ग) $3x + 2y – 5 = 0$
2. (क) $2x + y –1 = 0$ (ख) $2x + y + 1 = 0$ (ग) $x – 2y + 5 = 0$
(घ) P' (–4, 9), Q' (–10, 21)
3. (क) शिक्षकलाई देखाउनुहोस् । (ख) 35° (ग) $3x + 2y – 5 = 0$
4. (क) वृत्त (ख) $(3, \frac{5}{2})$, 4 एकाइ (ग) (5, 3)
5. (क) शिक्षकलाई देखाउनुहोस् । (ख) (1,–2), 3 एकाइ (ग) $y – 1 = 0$
6. (क) $x + y – 6 = 0$, $2x – 3y – 7 = 0$ (ख) 180° परिक्रमणको केन्द्र (0, 0)
(ग) A′ (−1, −5), B′(−5,−1) र C′(−8,−3) (घ) शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।
7. (क) शिक्षकलाई देखाउनुहोस् । (ख) P' (7, 4) Q' (11, 12) R' (16, 7)
(ग) $4x – 3y + 2 = 0$ (घ) शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।
8. (क) $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ (ख) M'(2, 5), U'(6, 5) र N'(6, 11) (ग) शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।
9. (क) 270° को परिक्रमण केन्द्रविन्दु (0,0) (ख) A'(2, –3), B'(2, –1) र C'(3, –2)
(ग) शिक्षकलाई देखाउनुहोस् । (घ) $x + y – 5 = 0$
10. (क) $\tan\theta = \pm\left(\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right)$ (ख) $3x + 3y – 5 = 0$ (ग) B'(–3, –2), U'(–1, 1) र T'(–5, 5)

पाठ 10 भेक्टर (Vector)

10.1 परिचय (Introduction)

मान र दिशा दुबै जनाउने भौतिक राशिलाई भेक्टर भनिन्छ । भेक्टरको अवधारणा, प्राचीन ग्रिक ज्यामितिसँग जोडिए पनि 19 औँ शताब्दीमा आएर भौतिक विज्ञान र गणितका समस्याहरू हल गर्ने क्रममा विकास भएको मानिन्छ। भेक्टरको आधुनिक विश्लेषण आयरल्यान्डका गणितज्ञ William Rowan Hamilton (1805 – 1865) ले सन् 1843 मा Quaternion को आविष्कार गरेपछि भएको थियो। उनले परिमाण र दिशालाई एकैसाथ जनाउन Quaternion सिद्धान्त प्रतिपादन गरेका थिए । त्यसपछि, अमेरिकी वैज्ञानिक Josiah Willard Gibbs र बेलायती इन्जिनियर Oliver Heaviside ले Hamilton को सिद्धान्तलाई सरल बनाउँदै भेक्टर विश्लेषणको अवधारणा विकास गरे, जसले आधुनिक इन्जिनियरिङ र विज्ञानको विकासमा ठुलो टेवा पुऱ्याएको पाइन्छ । यसको प्रयोग भौतिक विज्ञान, गणित, इन्जिनियरिङ तथा कम्प्युटर विज्ञानका विभिन्न समस्याहरू समाधान गर्न उपयोगी हुन्छ ।


William Hamilton

10.2 स्केलर गुणनफल (Scalar Product)

10.2.1 स्केलर गुणनफलको परिचय (Introduction of Scalar Product)

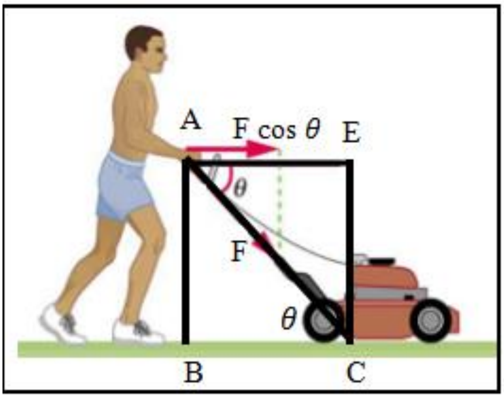
क्रियाकलाप 1

सँगैको चित्र अवलोकन गरी तलका प्रश्नहरूमा छलफल गर्नुहोस् :

(क) मानिसले प्रयोग गरेको बल, विस्थापन र कामको परिमाणमध्ये कुन राशि भेक्टर वा स्केलर हो ? किन ?

(ख) मानिसले गरेको कामलाई समीकरणमा कसरी व्यक्त गर्न सकिन्छ ?

(ग) उक्त मानिसले कति काम गरेको रहेछ ?



यहाँ, एउटा मानिसले क्षितिजसँग θ कोण बनाई FN बराबरको बल लगाएर घाँस काट्ने मेसिनले घाँस काटिरहेको छ । यस अवस्थामा मानिसले d (BC) बराबरको घाँस काटेका छन् । तसर्थ उक्त मानिसले घाँस काट्ने मेसिनमा विस्थापनको दिशामा पर्ने बल F cosθ लगाएका छन् । यस अवस्थामा

मानिसले लगाएको बल (F) र विस्थापन गरेको दुरी (d) दुबै भेक्टर परिमाण हुन् किनकि यी दुबै राशिले दिशा र मान दुबै दिन्छन् । तर कार्य (W) स्केलर परिमाण हो जसले मान राशि मात्र दिन्छ ।

हामीलाई थाहा छ,

$W = \vec{F}\cdot\vec{d} = F\cos\theta d = |F|\,|d|\cos\theta$

अतः $W = |F|\,|d|\cos\theta$

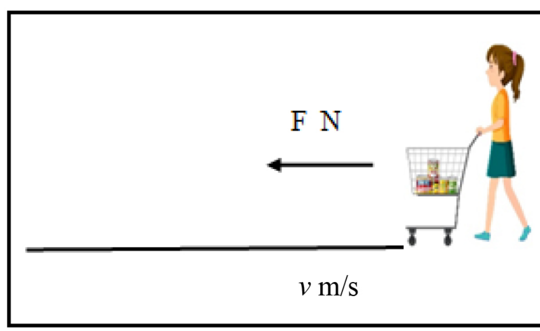
यसरी कुनै पनि वस्तुमा बल लगाउँदा विस्थापनको दिशामा पर्ने बल र विस्थापन भएको दुरीको गुणनफलले कार्यको परिमाण जनाउँछ जुन स्केलर राशि हुन्छ । यसरी दुई भेक्टर $\vec{F}$ र $\vec{d}$ लाई गुणन गर्दा स्केलर परिमाण आउने भएकाले यस गुणनलाई स्केलर गुणनफल भनिएको हो । कार्यको एकाइ जुल (Joule) हुन्छ ।

कुनै पनि वस्तुमा बल लगाउँदा विस्थापनको दिशामा पर्ने बल र वस्तुले विस्थापन गरेको दुरीको गुणनफललाई कार्य भनिन्छ । कार्यले परिमाण मात्र जनाउने भएकाले कार्य स्केलर राशि हुन्छ । कार्य = बल × विस्थापित दुरी, अर्थात् $W = \vec{F}\cdot\vec{d} = |F|\,|d|\cos\theta$.

क्रियाकलाप 2

सँगैको चित्रको अवलोकन गरी तलका प्रश्नहरूमा छलफल गर्नुहोस् :

एउटी बालिकाले समतल सडकमा रहेको ट्रलीलाई F N को बल लगाएर सिधा दिशामा धकेल्दा t मिनेटमा ट्रली V m/s को समान गतिले अगाडि बढ्छ ।



(क) सामर्थ्य बल तथा गतिमध्ये कुन कुन भेक्टर राशि हुन् र कुन कुन स्केलर राशि हुन्, कारणसहित लेख्नुहोस् ।

(ख) सामर्थ्य, बल र गतिबिचको सम्बन्ध जनाउने समीकरण लेख्नुहोस् ।

(ग) बालिकाले ट्रलीमा लगाएको सामर्थ्य कति हुन्छ ?

यहाँ, बालिकाले F N बराबरको बल लगाएर ट्रलीलाई सिधा रेखामा धकेल्दा t मिनेटमा ट्रली v m/s को समान गतिले अगाडि बढ्छ । यस अवस्थामा बालिकाले ट्रलीलाई विस्थापनको दिशामा पर्ने बल F cosθ लगाएकी छिन् । यस अवस्थामा बालिकाले लगाएको बल (F) र ट्रलीको गति (v) दुबै भेक्टर परिमाण हुन् किनकि यी दुबै राशिले दिशा र मान दुबै दिन्छन् । तर प्रयोग गरिएको शक्ति (P) स्केलर परिमाण हो किनकि यस राशिले मान मात्र दिन्छ ।

हामीलाई थाहा छ,

$$\text{शक्ति (P)} = \vec{F}.\vec{v} = F\cos\theta\, v = |F|\,|v|\cos\theta$$

$$\text{अत: } P = |F||v|\cos\theta$$

यसरी कुनै पनि वस्तुमा बल लगाउँदा विस्थापनको दिशामा पर्ने बल र वस्तु सर्ने गतिको गुणनफलले शक्तिको परिमाण जनाउँछ जुन स्केलर राशि हुन्छ । यसरी दुई भेक्टर $\vec{F}$ र $\vec{v}$ लाई गुणन गर्दा स्केलर परिमाण आउने भएकाले यसलाई भेक्टरको स्केलर गुणनफल भनिन्छ । शक्तिको एकाइ वाट (watt) हुन्छ ।

कुनै पनि वस्तुमा बल लगाउँदा विस्थापनको दिशामा पर्ने बल र त्यो बलको दिशामा वस्तु सर्ने गतिको गुणनफललाई शक्ति भनिन्छ । शक्तिले परिणाम मात्र जनाउने भएकाले शक्ति स्केलर राशि हुन्छ । शक्ति = बल × गति, अर्थात् $P = \vec{F}\ \vec{v} = |F|\ |v|\cos\theta$

माथिका दुईओटा क्रियाकलापहरूबाट स्पष्ट हुन्छ कि कुनै दुईओटा भेक्टरको स्केलर गुणनफल भन्नाले पहिलो भेक्टरको मान, दोस्रो भेक्टरको मान र $\cos\theta$ को गुणनफललाई जनाउँछ । तसर्थ दुईओटा भेक्टर राशि गुणन गर्दा स्केलर परिमाण आउने भएकाले यस अवधारणालाई नै स्केलर गुणनफल भनिएको हो ।

दुईओटा भेक्टरहरू $\vec{a}$ र $\vec{b}$ र तिनीहरूबिचको कोण $\theta(0 \le \theta \le \pi)$ छ भने $\vec{a}$ र $\vec{b}$ को स्केलर गुणनफललाई $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ का रूपमा परिभाषित गरिन्छ । स्केलर गुणनफललाई डट गुणनफल पनि भनिन्छ । दुई भेक्टरबिचको कोण θ पत्ता लगाउन $\cos\theta = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ प्रयोग गरिन्छ ।

10.2.2 भेक्टरहरू समानान्तर र लम्ब हुने अवस्था

(Conditions for Parallel and Perpendicular of Vectors)

(क) दुई भेक्टर आपसमा समानान्तर हुँदा तिनीहरूबिचको कोण $0°$ वा $180°$ हुन्छ ।

$\theta = 0°$ हुँदा, $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta$

अथवा, $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos 0°$

अथवा, $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,.\,1$

अत: $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|$

$\theta = 180°$ हुँदा, $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta$

अथवा, $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos 180°$

अथवा, $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,(-1)$

अत: $\vec{a}.\vec{b} = -|\vec{a}|\,|\vec{b}|$

दुई भेक्टरहरू $\vec{a}$ र $\vec{b}$ आपसमा समानान्तर हुँदा $\vec{a}.\vec{b} = \pm|\vec{a}|\,|\vec{b}|$ हुन्छ ।

(ख) दुई भेक्टर आपसमा लम्ब हुँदा तिनीहरूबिचको कोण $90°$ हुन्छ ।

$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta$

अथवा, $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|\ |\vec{b}| \cos 90°$

अथवा, $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|\ |\vec{b}|\ .0$

अतः $\vec{a}.\vec{b} = 0$

दुई भेक्टरहरू $\vec{a}$ र $\vec{b}$ आपसमा लम्ब हुँदा $\vec{a}.\vec{b} = 0$ हुन्छ ।

10.2.3 निर्देशाङ्कका रूपमा स्केलर गुणनफल (Scalar Product in Terms of Coordinates)

दुईओटा भेक्टरहरू $\vec{a} = (x_1, y_1)$ र $\vec{b} = (x_2, y_2)$ छन् । भेक्टरहरू $\vec{a}$ र $\vec{b}$ लाई एकाइ भेक्टरका रूपमा रूपान्तरण गर्दा, $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ र $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$ हुन्छ ।

अब, $\vec{a}.\vec{b} = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j}).\ (x_2\vec{i} + y_2\vec{j})$

$= x_1\vec{i}\ .x_2\vec{i} + x_1\vec{i}\ .\ y_2\vec{j} + y_1\vec{j}\ .\ x_2\vec{i} + y_1\vec{j}\ .\ y_2\vec{j}$

$= x_1x_2 + y_1.y_2\ [\because \vec{i}\ .\ \vec{i} = 1$ र $\vec{i}\ .\ \vec{j} = 0]$

दुईओटा भेक्टरहरू $\vec{a} = (x_1, y_1)$ र $\vec{b} = (x_2, y_2)$ का रूपमा भए $\vec{a}.\vec{b} = x_1x_2 + y_1.\ y_2$ हुन्छ ।

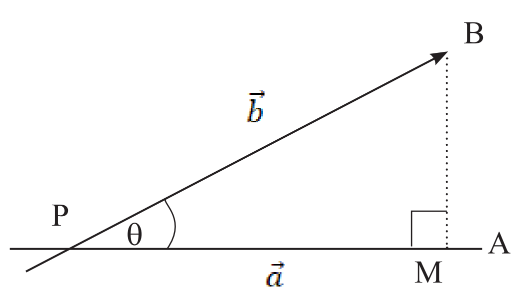
10.2.4 स्केलर गुणनफलको ज्यामितीय अर्थ (Geometrical Meaning of Scalar Product)

मानौँ, $\overrightarrow{PA} = \vec{a}$ र $\overrightarrow{PB} = \vec{b}$ दुईओटा भेक्टरहरू हुन् र तिनीहरूबिचको कोण $\theta\ (0 \le \theta \le \pi)$ छ अब, विन्दु B बाट $\overrightarrow{PA}$ मा लम्ब खिच्दा समकोणी त्रिभुज PMB बन्छ ।

अब त्रिभुज PMB मा,

$\cos\theta = \dfrac{PM}{PB} = \dfrac{PM}{|\vec{b}|}$

अथवा, $PM = |\vec{b}| \cos\theta$



$PM = |\vec{b}| \cos\theta$

अब $\vec{a}\ .\ \vec{b} = (|\vec{a}|)\ (|\vec{b}| \cos\theta)$

$= (\vec{a}$ को लम्बाइ) PM

$= (\vec{a}$ को लम्बाइ) ($\vec{b}$ को $\vec{a}$ मा प्रक्षेपण)

त्यसै गरी, $\vec{a}\ .\ \vec{b} = (|\vec{b}|)(|\vec{a}| \cos\theta)$

$= (\vec{b}$ को लम्बाइ) ($\vec{a}$ को $\vec{b}$ मा प्रक्षेपण)

दुईओटा भेक्टरहरूको स्केलर गुणनफलको ज्यामितीय अर्थ पहिलो भेक्टरको लम्बाइ र दोस्रो भेक्टरको पहिलो भेक्टरमा हुने प्रक्षेपणको गुणनफल हो । यसलाई, दोस्रो भेक्टरको लम्बाइ र पहिलो भेक्टरको दोस्रो भेक्टरमा हुने प्रक्षेपणको गुणनफलका रूपमा पनि लिइन्छ ।

10.2.5 स्केलर गुणनफलको गुणहरू (Properties of Scalar Product)

(क) क्रम विनिमय गुण (commutative property) : यदि दुई भेक्टरहरू $\vec{a}$ र $\vec{b}$ छन् भने $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$ हुन्छ ।

(ख) वितरण गुण (distributive property) : यदि भेक्टरहरू $\vec{a}, \vec{b}$ र $\vec{c}$ छन् भने, $\vec{a}.(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$ हुन्छ ।

(ग) स्केलरले गुणन (multiplication by scalar) : यदि दुई भेक्टरहरू $\vec{a}$ र $\vec{b}$ छन् र k एउटा स्केलर राशि हो भने, $(k\vec{a}).\vec{b} = \vec{a}.(k\vec{b}) = k(\vec{a}.\vec{b})$

(घ) अधिकतम मान : यदि दुई भेक्टरहरू एउटै दिशामा छन् भने ($\theta = 0°$), $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|$ हुन्छ । यो स्केलर गुणनफलको सबैभन्दा ठुलो मान हो ।

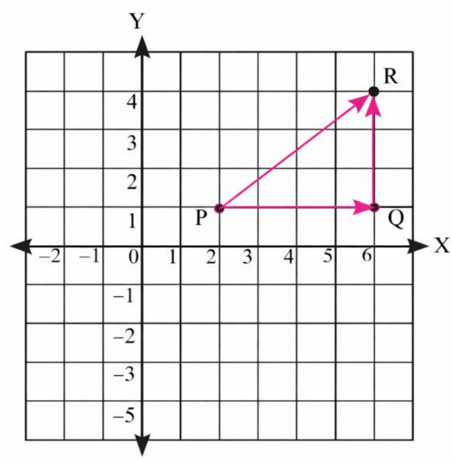
(ङ) न्यूनतम मान : यदि दुई भेक्टरहरू विपरीत दिशामा छन् भने ($\theta = 180°$), $\vec{a}.\vec{b} = -|\vec{a}||\vec{b}|$ हुन्छ । यो स्केलर गुणनफलको सबैभन्दा सानो मान हो ।

10.2.6 भेक्टर जोडको त्रिभुज नियम (Triangle Law of Vector Addition)

दिइएको लेखाचित्र अध्ययन गरी निम्नलिखित प्रश्नहरूको उत्तर लेख्नुहोस् :

(क) $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{QR}$ र $\overrightarrow{PR}$ लाई निर्देशाङ्कका रूपमा लेख्नुहोस् ।

(ख) $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{QR}$ र $\overrightarrow{PR}$ बिचको सम्बन्ध खोजी गर्नुहोस् ।



चित्रमा, $\overrightarrow{PQ}$ ले विन्दु P लाई विन्दु Q मा र $\overrightarrow{QR}$ ले विन्दु Q लाई विन्दु R मा विस्थापन गर्छन् भने तिनीहरूको समग्र विस्थापन $\overrightarrow{PR}$ ले (विन्दु P बाट विन्दु R सम्मको विस्थापन) ले दिन्छ । अर्थात्, $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$ हुन्छ ।

भेक्टर जोडको यो नियमलाई भेक्टर जोडको त्रिभुज नियम (triangle law of vector addition) भनिन्छ ।

विचारणीय प्रश्न : $\overrightarrow{PQ}$ र $\overrightarrow{QR}$ लाई अन्य दुई भेक्टरका रूपमा कसरी व्यक्त गर्न सकिन्छ ?

यदि दुईओटा भेक्टरहरूलाई त्रिभुजका दुईओटा भुजाले क्रमअनुसार प्रतिनिधित्व गरिएको छ भने ती दुई भेक्टरहरूको जोड त्रिभुजको तेस्रो भुजाले विपरीत दिशामा प्रतिनिधित्व गर्छ ।

उदाहरण 1

यदि $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ र $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ भए, $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ र $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$

हामीलाई थाहा छ, $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = x_1x_2 + y_1y_2$

$= (2 \times 5) + (3 \times 1)$

$= 10 + 3 = 13$

अतः $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 13$

उदाहरण 2

यदि $|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 6$ र तिनीहरूबिचको कोण $\theta = 60°$ भए $\vec{a}.\vec{b}$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, $|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 6, \theta = 60°$

अब, $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta$

$= 5 \times 6 \cos 60°$

$= 5 \times 6 \times (\frac{1}{2}) = 15$

अतः $\vec{a}.\vec{b} = 15$

उदाहरण 3

विन्दुहरू A(1, –3) र B (3, 4) छन् । उद्गमविन्दु O(0, 0) हो । के $\overrightarrow{OA}$ र $\overrightarrow{OB}$ एकआपसमा लम्ब छन्, आफ्नो उत्तरलाई पुष्टि गर्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ, $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ र $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$

हामीलाई थाहा छ, स्केलर गुणनफल $(\vec{a}.\vec{b}) = x_1x_2 + y_1y_2$

यहाँ, $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = (1 \times 3) + (-3 \times 4)$

$= 3 - 12 = -9$

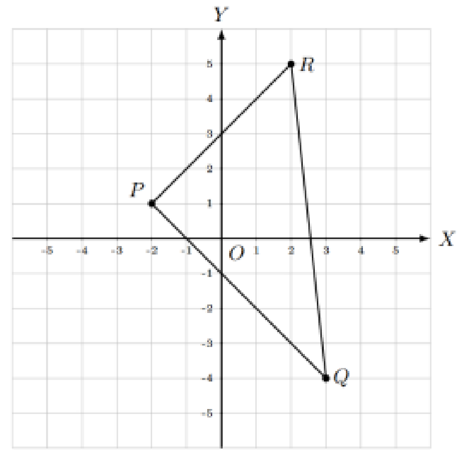
अतः $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = -9$

हामीलाई थाहा छ, यदि दुई भेक्टरहरू एकआपसमा लम्ब हुनका लागि तिनीहरूको स्केलर गुणनफल शून्य (0) हुनुपर्छ ।

अत: $\overrightarrow{OA}$ र $\overrightarrow{OB}$ एकआपसमा लम्ब छैनन् ।

उदाहरण 4

चित्रमा तीनओटा विन्दुहरू P(– 2, 1), Q (3, – 4) र R (2, 5) दिइएका छन् ।



(क) $\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{QR}$ पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) यदि $\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{QR}$ को मान ऋणात्मक आयो भने ∠PQR को प्रकृति (न्यूनकोण वा अधिककोण) कस्तो हुन्छ, विश्लेषण गर्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ, दिइएका विन्दुहरू P (– 2, 1), Q (3, – 4) र R (2, 5) हुन् ।

(क) यदि दुई विन्दुहरू A (x_1, y_1) र B (x_2, y_2) छन् भने, $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$

यहाँ P (– 2, 1) र Q (3, – 4) छन् ।

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - (-2) \\ -4 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}$$

त्यस्तै, Q (3, – 4) र R (2, 5) छन् ।

$$\overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-3 \\ 5 - (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

अत: $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}$ र $\overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{QR} = 5 \times (-1) + (-5) \times 9 = -5 - 45 = -50$

अत: $\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{QR} = -50$

(ख) $\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{OR} = -50$ जुन ऋणात्मक छ । जब दुई भेक्टरहरूको स्केलर गुणनफल ऋणात्मक हुन्छ, तिनीहरूबिचको कोण अधिककोण (> 90°) हुन्छ । तसर्थ बाहिरी कोण अधिककोण भएपछि, त्रिभुजको भित्री कोण ∠PQR न्यूनकोण हुन्छ ।

अर्को तरिका

कोण ∠PQR पत्ता लगाउन, हामीले विन्दु Q बाट सुरु हुने दुई भेक्टरहरू $\overrightarrow{QP}$ र $\overrightarrow{QR}$ को स्केलर गुणनफल हेर्नुपर्छ ।

$\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP} = -\binom{5}{-5}$

$\overrightarrow{QR} = \binom{-1}{9}$

यहाँ, $\overrightarrow{QP}.\overrightarrow{QR} = (-5) \times (-1) + (5 \times 9) = 5 + 45 = 50$ (धनात्मक)

दुई भेक्टरहरूको गुणनफल धनात्मक भएकाले तिनीहरूबिचको कोण $\angle PQR$ न्यूनकोण हुन्छ ।

उदाहरण 5

दुईओटा भेक्टरहरू $\overrightarrow{OA} = \binom{5}{m}$ र $\overrightarrow{OB} = \binom{4}{-2}$ दिइएका छन् । यी दुई भेक्टरहरूबिचको कोण $\angle AOB = 90°$ छ ।

(क) यदि दुई भेक्टरहरू एकआपसमा लम्ब छन् भने तिनीहरूको स्केलर गुणनफल कति हुन्छ ?

(ख) $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$ निकाली m को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) यदि $\overrightarrow{OA}$ र $\overrightarrow{OB}$ लम्ब हुनुको सट्टा समानान्तर भएको भए m को मान कति हुन्थ्यो, तुलना गर्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ, $\overrightarrow{OA} = \binom{5}{m}$ जहाँ $(x_1, y_1) = (5, m)$ र $\overrightarrow{OB} = \binom{4}{-2}$ जहाँ $(x_2, y_2) = (4, -2)$ र दुई भेक्टरबिचको कोण $\angle AOB = 90°$

(क) यदि दुई भेक्टर एकआपसमा लम्ब छन् भने तिनीहरूको स्केलर गुणनफल सधैँ शून्य (0) हुन्छ ।

$\therefore \quad \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 0$

(ख) स्केलर गुणनफलअनुसार,

$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = x_1x_2 + y_1y_2$

अथवा, $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 5 \times 4 + m \times (-2)$

अथवा, $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 20 - 2m$

$\angle AOB = 90°$ भएकाले $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 0$ हुन्छ ।

$20 - 2m = 0$

अथवा, $20 = 2m$

अत: $m = 10$

(ग) भेक्टरहरू समानान्तर भएको अवस्थामा,

यदि $\overrightarrow{OA}$ र $\overrightarrow{OB}$ समानान्तर हुँदा, $x_1y_2 = x_2y_1$

अथवा, $5 \times (-2) = 4 \times m$

अथवा, $-10 = 4m$

अतः $m = -2.5$

दुई भेक्टरहरू लम्ब हुनका लागि m को मान 10 हुनुपर्छ, तर तिनीहरू समानान्तर हुनका लागि m को मान -2.5 हुनुपर्छ । यी दुबै अवस्थामा m को मान फरक फरक हुन्छ ।

उदाहरण 6

तीनओटा भेक्टरहरू $\vec{a}, \vec{b}$ र $\vec{c}$ मा $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 5, |\vec{c}| = 4$ र $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = (0, 0)$ छन् ।

(क) कुनै भेक्टर $\vec{a}$ को वर्ग $(\vec{a})^2$ र यसको परिमाणको वर्ग $(|\vec{a}|)^2$ बिचको सम्बन्ध लेख्नुहोस् ।

(ख) $\vec{a}.\vec{c}$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) $\vec{a}.\vec{c}$ को मान र भुजाहरूको नापलाई विश्लेषण गर्दा यी तीन भेक्टरहरूले कस्तो प्रकारको त्रिभुज बन्छ ?

समाधान

यहाँ, $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0, |\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 5$ र $|\vec{c}| = 4$

(क) कुनै पनि भेक्टरको वर्ग र उक्त भेक्टरको परिमाणको वर्ग सधैँ बराबर हुन्छन् ।

(ख) माथिको समीकरण $(\vec{a} + \vec{c} = -\vec{b})$ को दुबैतर्फ वर्ग गर्दा,

$(\vec{a} + \vec{c})^2 = (-\vec{b})^2$

अथवा, $(\vec{a})^2 + 2\vec{a}.\vec{c} + (\vec{c})^2 = (\vec{b})^2$

अथवा, $|\vec{a}|^2 + 2\vec{a}.\vec{c} + |\vec{c}|^2 = |\vec{b}|^2$

अथवा, $(3)^2 + 2\vec{a}.\vec{c} + (4)^2 = (5)^2$

अथवा, $9 + 2\vec{a}.\vec{c} + 16 = 25$

अथवा, $25 + 2\vec{a}.\vec{c} = 25$

अथवा, $2\vec{a}.\vec{c} = 25 - 25$

अथवा, $2\vec{a}.\vec{c} = 0$

$\therefore \quad \vec{a}.\vec{c} = 0$

(ग) $\vec{a}.\vec{c} = 0$ भएकाले तिनीहरू एकआपसमा लम्ब हुन्छन् । दिइएका तीन भेक्टरहरूले एउटा समकोणी त्रिभुज बनाउँछन् ।

अभ्यास 10 .1

1. दिइएका प्रश्नहरूको उपयुक्त विकल्पमा ठिक चिह्न (✓) लगाउनुहोस् :

(क) दुई भेक्टरहरू $\vec{a}$ र $\vec{b}$ बिचको कोण θ भए, तिनीहरूको स्केलर गुणनफल कुन हो ?

a. $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\theta$ b. $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta$

c. $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}| + |\vec{b}| \cos\theta$ d. $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}| + |\vec{b}| \cos\theta$

(ख) यदि $\vec{a} = (x_1, y_1)$ र $\vec{b} = (x_2, y_2)$ भए, $\vec{a}.\vec{b}$ को मान कति हुन्छ ?

a. $x_1y_1 + x_2y_2$ b. $x_1x_2 - y_1y_2$

c. $x_1x_2 + y_1y_2$ d. $x_1y_2 + x_2y_1$

(ग) यदि $\vec{a}.\vec{b} = 0, |\vec{a}| \neq 0$ र $|\vec{b}| \neq 0$ भए, $\vec{a}$ र $\vec{a}$ बिचको कोण कति हुन्छ ?

a. 0° b. 45° c. 90° d. 180°

(घ) यदि $\vec{a}$ र $\vec{b}$ एउटै दिशामा समानान्तर छन् भने, $\vec{a}.\vec{b}$ को मान कति हुन्छ ?

a. $|\vec{a}||\vec{b}|$ b. $|\vec{a}||b|$ c. 0 d. 1

(ङ) यदि $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ र $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ भए, $\vec{a}.\vec{b}$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

a. 12 b. 0 c. –12 d. 6

(च) यदि $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ भए, $\vec{a}^2$ को मान कति हुन्छ ?

a. 5 b. 13 c. 13 d. 25

(छ) यदि $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 5 \\ m \end{pmatrix}, \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ र $\angle AOB = 90°$ भए, m को मान कति हुन्छ ?

a. 10 b. –10 c. 6 d. –6

2. दुई भेक्टरहरूको स्केलर गुणनफल भनेको के हो, उदाहरणसहित स्पष्ट पार्नुहोस् ।

3. दुई भेक्टरहरू कुन अवस्थामा लम्ब वा समानान्तर हुन्छ, कारण दिनुहोस् ।

4. **तलका भेक्टरहरूको स्केलर गुणनफल पत्ता लगाउनुहोस् :**

(क) $\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ र $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (ख) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ र $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

(ग) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ र $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (घ) $\vec{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ र $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

5. **तलका भेक्टरहरूबिचको कोण पत्ता लगाउनुहोस् :**

(क) $\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ र $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (ख) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ र $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

(ग) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ र $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (घ) $\vec{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ र $\vec{q} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

6. **तलका भेक्टरहरू एकआपसमा लम्ब वा समानान्तर के छन्, प्रमाणित गर्नुहोस् :**

(क) $\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ र $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (ख) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ र $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

7. तलका भेक्टरहरू एकआपसमा लम्ब भए m को मान पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) $\vec{i} = \begin{pmatrix} 2 \\ m \end{pmatrix}$ र $\vec{j} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ (ख) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ m \end{pmatrix}$ र $\vec{i} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$

(ग) $\vec{a} = 3\vec{i} + m\vec{j}$ र $\vec{b} = 6\vec{i} - 2\vec{j}$ (घ) $3\vec{i} - 2\vec{j}$ र $m\vec{i} + 3\vec{j}$

8. तलका भेक्टरहरू एकआपसमा समानान्तर भए m को मान पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) $\vec{i} = \begin{pmatrix} 2 \\ m \end{pmatrix}$ र $\vec{j} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ (ख) $\begin{pmatrix} 3 \\ m \end{pmatrix}$ र $\vec{i} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$

(ग) $\vec{a} = 3\vec{i} + m\vec{j}$ र $\vec{b} = 6\vec{i} - 2\vec{j}$ (घ) $3\vec{i} - 2\vec{j}$ र $m\vec{i} + 3\vec{j}$

9. $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ र $\vec{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ दुई भेक्टरहरू हुन् ।

(क) स्केलर गुणनफल $\vec{a}.\vec{b}$ कति हुन्छ ?

(ख) यदि $\vec{a}.\vec{b} = 0$ भए $\vec{a}$ र $\vec{b}$ बिचको सम्बन्ध कस्तो हुन्छ ?

(ग) यदि $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ र $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ भए $\vec{a}.\vec{b}$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(घ) $\vec{a}.\vec{b}$ को मान कुन अवस्थामा अधिकतम हुन्छ, कारणसहित व्याख्या गर्नुहोस् ।

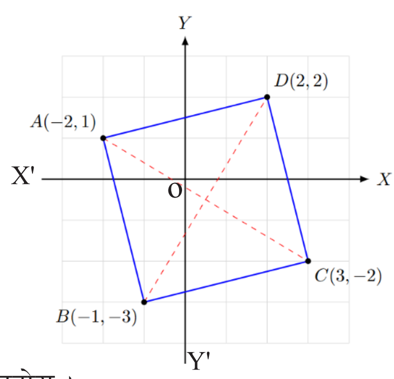
10. चारओटा विन्दुहरू A(– 2, 1), B(– 1, – 3), C(3, – 2) र D(2, 2) दिइएका छन् ।

(क) यदि $A(x_1, y_1)$ र $B(x_2, y_2)$ भए, भेक्टर $\overrightarrow{AB}$ कति हुन्छ ?

(ख) $\overrightarrow{AB}$ र $\overrightarrow{BD}$ लाई लहर भेक्टरका रूपमा लेख्नुहोस् ।

(ग) $\overrightarrow{AC}$ र $\overrightarrow{BD}$ बिचको कोण पत्ता लगाउनुहोस् ।

(घ) ABCD एउटा आयत वा वर्ग के हो, भुजाको नाप र कोणको आधारमा पुष्टि गर्नुहोस् ।



11. यदि $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ दिइएको छ ।

(क) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ हुनुको अर्थ के हो ?

(ख) यदि $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$ र $|\vec{c}| = 4$ भए $\vec{a}.\vec{c}$ निकाल्नुहोस् ।

12. यदि $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ भए भेक्टरहरू $\vec{a}$ र $\vec{b}$ एकआपसमा लम्ब हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

उत्तर

1. (क) b (ख) c (ग) c (घ) a (ङ) b (च) c (छ) a 2 - 3. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।
4. (क) 0 (ख) 6 (ग) 0 (घ) 0 5. (क) 90° ख) 0° (ग) 90° (घ) 90°

6. (क) लम्ब (ख) समानान्तर (ग) समानान्तर (घ) समानान्तर 7. (क) –3 (ख) $\frac{-9}{2}$
(ग) 9 (घ) 2 8. (क) $\frac{4}{3}$ (ख) 2 (ग) –1 (घ) $\frac{-9}{2}$
9. (क) $x_1x_2 + y_1.y_2$ (ख) लम्ब (ग) 23 (घ) शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।
10. (क) $\begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$ (ख) $\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ (ग) 0° (घ) शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।
11. (क) शिक्षकलाई देखाउनुहोस् । (ख) 0 13. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

परियोजना कार्य

एउटा ग्राफपेपरको बिच भागमा X- अक्ष र Y- अक्ष कोर्नुहोस् र तिनको काटिएको विन्दुलाई उद्गमविन्दु O(0, 0) मान्नुहोस् । सो ग्राफपेपरको विभिन्न भागमा (फरक फरक चतुर्थांशमा पर्ने गरी) कुनै 5 ओटा साना आकृतिहरू कोर्नुहोस् वा थोप्ला दिनुहोस्, जस्तै : घर (A), रुख (B), विद्यालय (C), मन्दिर (D) र पोखरी (E)।

(क) प्रत्येक वस्तुको निर्देशाङ्क (x, y) पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) ती निर्देशाङ्कहरूलाई स्थिति भेक्टर र लहर भेक्टरमा लेख्नुहोस् ।

(ग) दिइएको तालिका र प्रश्नहरूका आधारमा हिसाब गर्नुहोस् :

क्र.स.	वस्तुको नाम	सङ्केत	निर्देशाङ्क	स्थिति भेक्टर परिमाण	स्केलर गुणनफल
1.	घर	A	....	....	AO र OB
2.	....	....	....	....	OA र OB
3.	....	....	....	....	AB र BC
4.	....	....	....	....	....
5.	....	....	....	....	....

यसलाई प्रतिवेदन तयार पारी कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

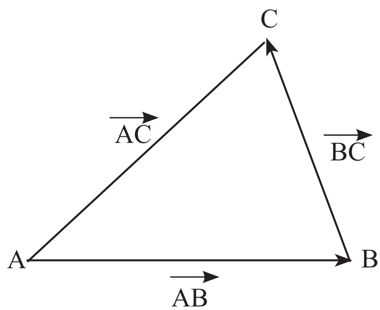
10.3 भेक्टर ज्यामिति (Vector Geometry)

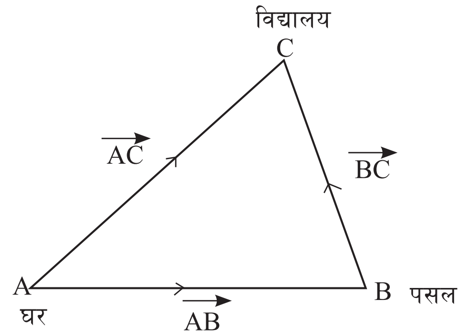
क्रियाकलाप 1

मानौं, तपाइँ घर (विन्दु A) बाट विद्यालय (विन्दु C) जानुपर्ने छ । यस्तो अवस्थामा चित्रका आधारमा सम्भावित बाटाहरू के के हुन सक्छन् ? एउटा छोटो बाटो विन्दु A बाट सिधै विन्दु C सम्म जान सकिन्छ । अर्को बाटो विन्दु A बाट विन्दु B हुँदै विन्दु C मा पुग्न सकिन्छ ।

(क) तपाईंले हिँडेको बाटो विन्दु A बाट विन्दु B हुँदै विन्दु C मा पुग्दा कुल दुरी कति हुन्छ, के यो A देखि C सम्मको सिधा दुरी (AC) सँग बराबर, कम वा बढी हुन्छ, छलफल गर्नुहोस् ।

(ख) अब दुरी र दिशाको कुरा गर्दा तपाईं A बाट B पुग्नुभयो । फेरि त्यहाँबाट विन्दु C सम्म पुग्नुभयो। तपाईं कहाँबाट हिँड्न सुरु गरेर कहाँ पुग्नुभयो ? हिँडेका आधारमा के $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ हुन्छ, छलफल गर्नुहोस् ।



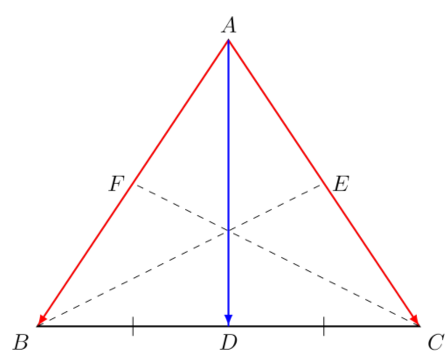


10.3.1 मध्यविन्दु साध्य (Mid-point Theorem)

कुनै पनि त्रिभुजमा कुनै एक भुजाको मध्यविन्दु जोड्ने मध्यिका (median) भेक्टर सोही विन्दुबाट जाने अन्य दुई भुजाहरूको भेक्टर योगफलको आधा हुन्छ ।

प्रमाण

मानौं, ΔABC मा भुजाहरू BC, AC र AB का मध्यविन्दुहरू क्रमश: D, E र F छन् । यहाँ, AD त्रिभुज ABC को मध्यिका हो ।



ΔABD मा भेक्टर जोडको त्रिभुज नियमअनुसार,

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$ .... (i)

त्यस्तै, ΔACD मा,

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$ .... (ii)

समीकरण (i) र (ii) लाई जोड्दा,

$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CD})$

अथवा, $2\overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CD})$

अथवा, $2\overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{0}$

अथवा, $2\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

अत: $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$

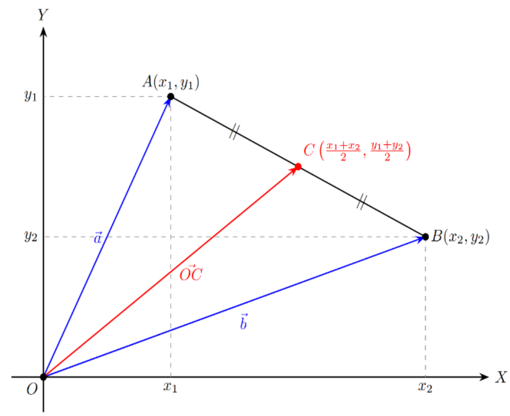
यसै गरी अन्य मध्यिकाहरूका लागि पनि निम्नलिखित सम्बन्ध स्थापित गर्न सकिन्छ :

$\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$ र $\overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$

यदि भेक्टरको सट्टा विन्दुहरूको निर्देशाङ्क दिइएको छ भने :

सँगैको चित्रमा विन्दु A को निर्देशाङ्क (x_1, y_1) र विन्दु B को निर्देशाङ्क (x_2, y_2) छ । रेखाखण्ड AB को मध्यविन्दु C को स्थिति भेक्टर वा निर्देशाङ्क

$\overrightarrow{OC} = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ हुन्छ ।



10.3.2 भित्री विभाजनसम्बन्धी साध्य (Internal DivisionTheorem)

यदि विन्दु A र B का स्थिति भेक्टरहरू क्रमशः $\vec{a}$ र $\vec{b}$ छन् । यी दुई विन्दु जोड्ने रेखाखण्ड AB लाई $m:n$ को अनुपातमा भित्री विभाजन गर्ने विन्दु P को स्थिति भेक्टर $\vec{p} = \dfrac{n\vec{a} + m\vec{a}}{m+n}$ हुन्छ ।

प्रमाण

उद्गमविन्दु O हो । $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ र $\overrightarrow{OP} = \vec{p}$ छन् ।

विन्दु P ले AB लाई $m : n$ अनुपातमा भित्री विभाजन गर्दछ, अर्थात् $AP : PB = m : n$

अथवा, $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{m}{n}$

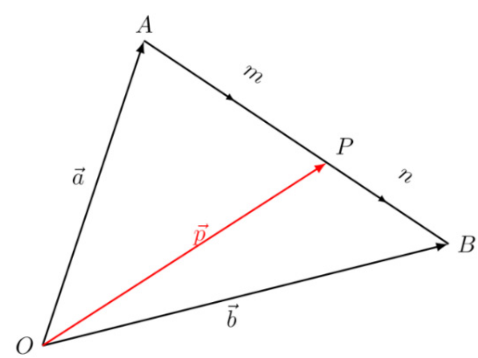
$\therefore n\overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{PB}$ ....(i)

हामीलाई थाहा छ, $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OX}$ हुन्छ ।

त्यसैले, $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}$

$= \vec{p} - \vec{a}$ र

$\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP} = \vec{b} - \vec{p}$



समीकरण (i) मा यी मानहरू राख्दा

$n(\vec{p} - \vec{a}) = m(\vec{b} - \vec{p})$

अथवा, $n\vec{p} - n\vec{a} = m\vec{b} - m\vec{o}$

अथवा, $n\vec{p} + m\vec{p} = n\vec{a} + m\vec{b}$

अथवा, $(n+m)\vec{b} = n\vec{a} + m\vec{b}$

$\therefore \vec{p} = \dfrac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m+n}$

अतः भित्री विभाजन गर्ने विन्दुको स्थिति भेक्टर $\vec{p} = \dfrac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m+n}$ हुन्छ ।

10.3.3 बाहिरी विभाजनसम्बन्धी साध्य (External Division Theorem)

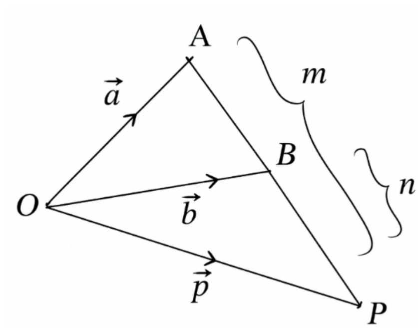
यदि विन्दु A र B का स्थिति भेक्टरहरू क्रमशः $\vec{a}$ र $\vec{b}$ छन् । यी दुई विन्दु जोड्ने रेखाखण्ड AB लाई $m : n$ को अनुपातमा बाहिरी (Externally) विभाजन गर्ने विन्दु P को स्थिति भेक्टर,

$$\overrightarrow{OP} = \vec{p} = \frac{m\vec{b} - n\vec{a}}{m-n} \text{ हुन्छ ।}$$

प्रमाण

उद्गमविन्दु O छ । $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ विन्दु P ले AB रेखाखण्डलाई बाहिरबाट m:n अनुपातमा विभाजन गर्छ, अर्थात् $AP : PB = m : n$

विन्दुहरू A, B र P एउटै रेखामा (Collinear) पर्छन् ।



$$\frac{AP}{PB} = \frac{m}{n}$$

$$\therefore n\overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{PB} \text{ ....(i)}$$

स्थिति भेक्टरको परिभाषाअनुसार

$\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OX}$ हुन्छ ।

त्यसैले, $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = \vec{p} - \vec{a}$ र $\overrightarrow{BP}$

$$= \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB} = \vec{p} - \vec{b}$$

समीकरण (i) मा यी मानहरू राख्दा,

$$n(\vec{p} - \vec{a}) = m(\vec{p} - \vec{b})$$

अथवा, $n\vec{p} - n\vec{a} = m\vec{p} - m\vec{b}$

अथवा, $m\vec{b} - n\vec{a} = m\vec{p} - n\vec{p}$

अथवा, $m\vec{b} - n\vec{a} = (m - n)\vec{p}$

$$\therefore \quad \vec{p} = \frac{m\vec{b} - n\vec{a}}{m-n}$$

अतः बाहिरी विभाजन गर्ने विन्दुको स्थिति भेक्टर $\vec{p} = \dfrac{m\vec{b} - n\vec{a}}{m-n}$ हुन्छ ।

10.4 साध्यहरू (Theorems)

हामीले समतल ज्यामितिमा त्रिभुजका साध्यहरू प्रमाणित गरे जसरी नै भेक्टरको स्केलर गुणन र भेक्टर जोडको त्रिभुज नियम प्रयोग गरी त्रिभुजका केही साध्यहरू प्रमाणित गर्न सक्छौँ ।

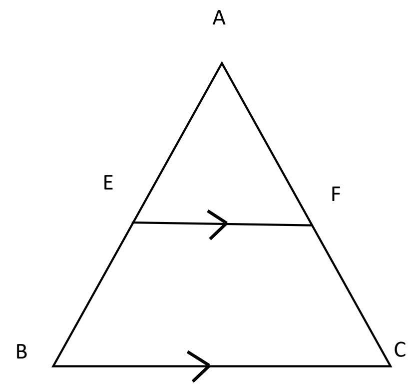
साध्य 1 : मध्यविन्दु साध्य

त्रिभुजका कुनै दुईओटा भुजाहरूको मध्यविन्दु जोड्ने रेखाखण्ड तेस्रो भुजासँग समानान्तर भई आधा हुन्छ ।

प्रमाण

थाहा दिएको : एउटा ΔABC छ । विन्दु E र F क्रमश: भुजा AB र AC का मध्यविन्दु हुन् ।

प्रमाणित गर्नुपर्ने : $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ र EF//BC



यहाँ, ΔAEF मा भेक्टर जोडको त्रिभुज नियमअनुसार

$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF}$ .... (i)

$\overrightarrow{EA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ र $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ [$\because$ E र F क्रमश: AB र AC का मध्यविन्दु भएकाले]

अब समीकरण (i) बाट

$\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

अथवा, $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$

अथवा, $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ ($\because \Delta ABC$ मा : $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$)

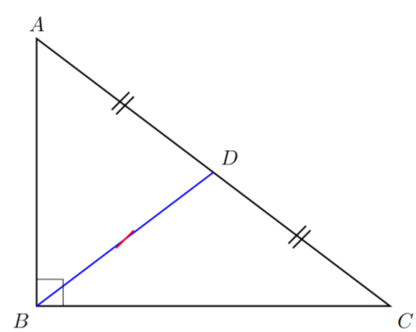
$\therefore \overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

समानान्तर भेक्टरको परिभाषाअनुसार $\overrightarrow{EF} = k.\overrightarrow{BC}$ जहाँ, $k = \frac{1}{2}$ त्यसैले $\overrightarrow{EF}$ र $\overrightarrow{BC}$ भेक्टरहरू आपसमा समानान्तर छन् ।

अत: त्रिभुजका कुनै दुईओटा भुजाहरूको मध्यविन्दु जोड्ने रेखाखण्ड तेस्रो भुजासँग समानान्तर भई आधा हुन्छ ।

साध्य 2

समकोणी त्रिभुजको कर्णको मध्यविन्दु त्रिभुजका तीनओटै शीर्षविन्दुहरूबाट समदुरीमा पर्छ ।



प्रमाण

थाहा दिएको : ΔABC एउटा समकोणी त्रिभुज हो, जहाँ $\angle B = 90°$ छ । भुजा AC त्रिभुजको कर्ण हो । विन्दु D कर्ण AC को मध्यविन्दु हो ।

प्रमाणित गर्नुपर्ने : विन्दु D बाट A, B र C सम्मको दुरी बराबर हुन्छ । अर्थात्, AD = BD = CD

यहाँ, $\angle ABC = 90°$ भएकाले $\overrightarrow{BA}$ र $\overrightarrow{BC}$ एकआपसमा लम्ब छन् ।

त्यसैले, $\overrightarrow{BA} . \overrightarrow{BC} = 0$ .... (i)

ΔABD मा $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA}$ र ΔBCD मा $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}$

समीकरण (i) मा मान प्रतिस्थापन गर्दा, $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 0$

अथवा, $(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA}).(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}) = 0$

अथवा, $(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA}).(\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{DA}) = 0$ (AC को मध्यविन्दु D भएकाले $\overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{DA}$ लेख्न सकिन्छ ।)

अथवा, $(\overrightarrow{BD})^2 - (\overrightarrow{DA})^2 = 0$ [$(\vec{a} + \vec{b}).(\vec{a} - \vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2$ हुन्छ ।

अथवा, $|\overrightarrow{BD}|^2 - |\overrightarrow{DA}|^2 = 0$

अथवा, $BD^2 = DA^2$

अथवा, BD = DA

यहाँ, D मध्यविन्दु भएकाले DA = DC हुन्छ ।

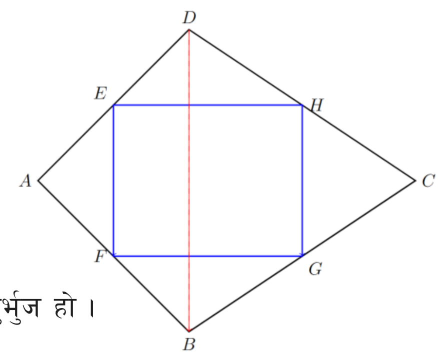
तसर्थ, AD = DC = BD

अत: समकोणी त्रिभुजको कर्णको मध्यविन्दु त्रिभुजका तीनओटै शीर्षविन्दुहरूबाट समदुरीमा पर्छ ।

साध्य 3: चतुर्भुजको भुजाहरूको मध्यविन्दु

चतुर्भुजका भुजाहरूका मध्यविन्दुहरूलाई क्रमश: जोड्दै जाँदा बन्ने चतुर्भुज एउटा समानान्तर चतुर्भुज हुन्छ ।

प्रमाण



थाहा दिएको : ABCD एउटा चतुर्भुज हो । F, G, H र E क्रमश: भुजाहरू AB, BC, CD र AD का मध्यविन्दुहरू हुन् । यी मध्यविन्दुहरूलाई क्रमैसँग जोडेर चतुर्भुज EFGH बनाइएको छ ।

प्रमाणित गर्नुपर्ने : चतुर्भुज EFGH एउटा समानान्तर चतुर्भुज हो ।

अर्थात् : $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$ वा $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG}$)

रचना : शीर्षविन्दु B र D लाई जोडौँ ।

ΔABD मा F र E क्रमश: AB र AD का मध्यविन्दुहरू हुन् । भेक्टरको मध्यविन्दु साध्यअनुसार त्रिभुजको दुई भुजाको मध्यविन्दु जोड्ने रेखा तेस्रो भुजासँग समानान्तर भई आधा हुन्छ ।

$\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$ .... (i)

त्यसै गरी, त्रिभुज ΔCBD मा,

$\overrightarrow{HG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$ ....(ii)

समीकरण (i) र (ii) बाट $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$

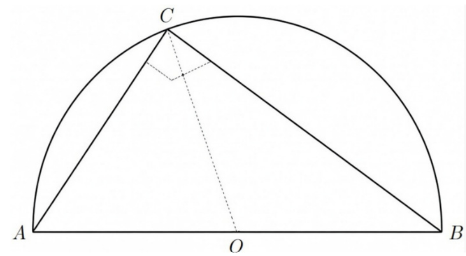
बराबर भेक्टरहरू सधैँ समानान्तर हुन्छन्, त्यसैले EF// HG हुन्छ ।

त्यसै गरी, शीर्षविन्दु A र C लाई जोड्ने हो भने $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG}$ र $\overrightarrow{EH} // \overrightarrow{FG}$ [$\because$ माथिको जस्तै प्रक्रियाअनुसार]

त्यसैले, EFGH एउटा समानान्तर चतुर्भुज हो ।

अतः चतुर्भुजका भुजाहरूका मध्यविन्दुहरूलाई क्रमशः जोड्दै जाँदा बन्ने चतुर्भुज एउटा समानान्तर चतुर्भुज हुन्छ ।

साध्य 4 : अर्धवृत्तमा बनेको कोण एक समकोण हुन्छ ।



प्रमाण

थाहा दिएको : O केन्द्रविन्दु भएको एउटा अर्धवृत्त छ । AB उक्त अर्धवृत्तको व्यास हो । C अर्धवृत्तको परिधिमा पर्ने कुनै एउटा विन्दु हो ।

प्रमाणित गर्नुपर्ने : $\angle ACB$ एक समकोण हो ।

वृत्तको केन्द्रबाट परिधिसम्मको दुरी (अर्धव्यास) सधैँ बराबर हुन्छ ।

त्यसैले, $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = r$

अब, $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}).(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB})$

$= (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}).(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{AO})$ $[\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OB}]$

$= (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}). (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA})$ $[\overrightarrow{OA} = -AO]$

$= (\overrightarrow{OC})^2 - (\overrightarrow{OA})^2$

$= |\overrightarrow{OC}|^2 - |\overrightarrow{OA}|^2$

$= OA^2 - OA^2$ $[\therefore |\overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{OA}| = r]$

$= 0$

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC} = 0$ भएको हुनाले $\overrightarrow{AC}$ र $\overrightarrow{BC}$ एकआपसमा लम्ब हुन्छन् ।

अतः अर्धवृत्तमा बनेको कोण एक समकोण $(90°)$ हुन्छ ।

उदाहरण 1

विन्दु A र B का स्थिति भेक्टरहरू क्रमशः $4\vec{i} + 3\vec{j}$ र $2\vec{i} - \vec{j}$ छन् । AB को मध्यविन्दु M को स्थिति भेक्टर पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, $\overrightarrow{OA} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$, $\overrightarrow{OB} = 2\vec{i} - \vec{j}$

मध्यविन्दु साध्यअनुसार

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{2}(4\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{i} - \vec{j}) = \frac{1}{2}(6\vec{i} + 2\vec{j}) = 3\vec{i} + \vec{j}$$

अतः M को स्थिति भेक्टर $= 3\vec{i} + \vec{j}$ हुन्छ ।

उदाहरण 2

विन्दु A र B का स्थिति भेक्टरहरू क्रमशः $x_1\vec{i}+y_1\vec{j}$ / $x_2\vec{i}+y_2\vec{j}$ छन् । विन्दु P ले रेखाखण्ड AB लाई भित्री रूपमा m :n अनुपातमा विभाजन गर्छ । विन्दु P को स्थिति भेक्टरलाई $\vec{i}$ र $\vec{j}$ का रूपमा लेख्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ, $\overrightarrow{OA}=\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}$ र $\overrightarrow{OB}=\vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}$ छन् ।

विन्दु P ले AB लाई $m:n$ अनुपातमा भित्री विभाजन गर्छ ।

खण्डसूत्र साध्यअनुसार : $\overrightarrow{OP}=\dfrac{m\overrightarrow{OB}+n\overrightarrow{OA}}{m+n}$

अथवा, $\overrightarrow{OP}=\dfrac{n(x_1\vec{i}+y_1\vec{j})+m(x_2\vec{i}+y_2\vec{j})}{m+n}$

अथवा, $\overrightarrow{OP}=\dfrac{nx_1\vec{i}+ny_1\vec{j}+mx_2\vec{i}+my_2\vec{j}}{m+n}$

अथवा, $\overrightarrow{OP}=\dfrac{(mx_2+nx_1)\vec{i}+(my_2+ny_1)\vec{j}}{m+n}$

अतः $\overrightarrow{OP}=\dfrac{(mx_2+nx_1)\vec{i}+(my_2+ny_1)\vec{j}}{m+n}$

उदाहरण 3

विन्दुहरू A र B का स्थिति भेक्टरहरू क्रमशः $\overrightarrow{OA}=4\vec{i}+3\vec{j}$ र $\overrightarrow{OB}=3\vec{i}-4\vec{j}$ छन् ।

(क) विन्दु M ले AB लाई भित्री रूपमा 3 : 2 अनुपातमा विभाजन गर्छ भने M को स्थिति भेक्टर पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) विन्दु N ले AB लाई बाहिरपट्टिबाट 5 : 3 अनुपातमा विभाजन गर्छ भने N को स्थिति भेक्टर पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, $\overrightarrow{OA}=4\vec{i}+3\vec{j}$ र $\overrightarrow{OB}=3\vec{i}-4\vec{j}$

(क) भित्रबाट विभाजन गर्ने विन्दु M हो भने $m:n=3:2$ छ ।

अब, खण्डसूत्रअनुसार, $\overrightarrow{OM} = \frac{n\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OB}}{m+n}$

अथवा, $\overrightarrow{OM} = \frac{2(4\vec{i} + 3\vec{j}) + 3(3\vec{i} - 4\vec{j})}{3+2}$

अथवा, $\overrightarrow{OM} = \frac{(8\vec{i} + 6\vec{j}) + (9\vec{i} - 12\vec{j})}{5}$

अथवा, $\overrightarrow{OM} = \frac{(8+9)\vec{i} + (6-12)\vec{j}}{5}$

अथवा, $\overrightarrow{OM} = \frac{17\vec{i} - 6\vec{j}}{5}$

अथवा, $\overrightarrow{OM} = \frac{17}{5}\vec{i} - \frac{6}{5}\vec{j}$

अत : $\overrightarrow{OM}$ को मान $\frac{17}{5}\vec{i} - \frac{6}{5}\vec{j}$ हुन्छ ।

(ख) यहाँ, $\overrightarrow{OA} = \vec{a} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$ र $\overrightarrow{OB} = \vec{b} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$ छन् । बाहिरबाट विभाजन गर्ने विन्दु N हो भने $m:n = 5:3$ छ ।

अब, बाहिरी खण्डसूत्र अनुसार, $\overrightarrow{ON} = \frac{m\vec{b} - n\vec{a}}{m-n}$

अथवा, $\overrightarrow{ON} = \frac{5(3\vec{i} - 4\vec{j}) - 3(4\vec{i} + 3\vec{j})}{5-3}$

अथवा, $\overrightarrow{ON} = \frac{(15\vec{i} - 20\vec{j}) - (12\vec{i} + 9\vec{j})}{2}$

अथवा, $\overrightarrow{ON} = \frac{(15-12)\vec{i} + (-20-9)\vec{j}}{2}$

अथवा, $\overrightarrow{ON} = \frac{3}{2}\vec{i} - \frac{29}{2}\vec{j}$

अत: $\overrightarrow{ON}$ को मान $\frac{3}{2}\vec{i} - \frac{29}{2}\vec{j}$ हुन्छ ।

अभ्यास 10.2

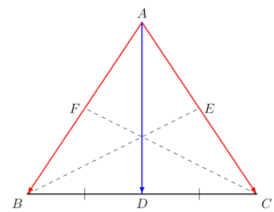
ज्ञ। **दिइएका प्रश्नहरूको उपयुक्त विकल्पमा ठिक चिह्न (✓) लगाउनुहोस् :**

(क) त्रिभुज ABC मा $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ कुन भुजासँग बराबर हुन्छ ?

a. $\overrightarrow{CA}$ b. $\overrightarrow{BA}$

c. $\overrightarrow{AC}$ d. $\overrightarrow{CB}$

(ख) दिइएको ΔABC मा D, E, F मध्यविन्दुहरू हुन् ।
$2\overrightarrow{AD}$ कुन भुजासँग बराबर हुन्छ ?



a. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ b. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

c. $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ d. $\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$

(ग) यदि A र B का स्थिति भेक्टरहरू क्रमशः $\vec{a}$ र $\vec{b}$ भए, रेखाखण्ड AB को मध्यविन्दुको स्थिति भेक्टर तलका मध्ये कुन हो ?

a. $\vec{a} + \vec{b}$ b. $\frac{\vec{a} - \vec{b}}{2}$ c. $\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$ d. $2(\vec{a} + \vec{b})$

(घ) यदि $\overrightarrow{OA} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$ र $\overrightarrow{OB} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$ भए, AB को मध्यविन्दुको स्थिति भेक्टर कति हुन्छ ?

a. $7\vec{i} - \vec{j}$ b. $\frac{1}{2}(7\vec{i} - \vec{j})$ c. $\vec{i} + 7\vec{j}$ d. $\frac{1}{2}(\vec{i} + 7\vec{j})$

(ङ) यदि विन्दु P ले $\vec{a}$ र $\vec{b}$ लाई जोड्ने रेखाखण्डलाई भित्री रूपमा m:n को अनुपातमा विभाजन गर्छ भने, P को स्थिति भेक्टर $\vec{p}$ कुन हो ?

a. $\frac{m\vec{a} + n\vec{b}}{m + n}$ b. $\frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m + n}$ c. $\frac{n\vec{a} - m\vec{b}}{n - m}$ d. $\frac{m\vec{b} + n\vec{a}}{m - n}$

द्व। (क) यदि विन्दुहरू P र Q का स्थिति भेक्टरहरू क्रमशः $4\vec{i} + 7\vec{j}$ र $4\vec{i} - 3\vec{j}$ भए PQ को मध्यविन्दु R को स्थिति भेक्टर पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) यदि विन्दुहरू R र S का स्थिति भेक्टरहरू क्रमशः $5\vec{i} - 4\vec{j}$ र $3\vec{i} + 6\vec{j}$ भए RS को मध्यविन्दु T को स्थिति भेक्टर पत्ता लगाउनुहोस् ।

3. A(2, – 3) र B(3, 2) रेखाखण्ड AB को छेउका विन्दुहरू हुन् ।

(क) M ले AB लाई 2 : 3 को अनुपातमा भित्रबाट विभाजन गरेको छ भने M को स्थिति भेक्टर पत्ता लगाउनुहोस् ।

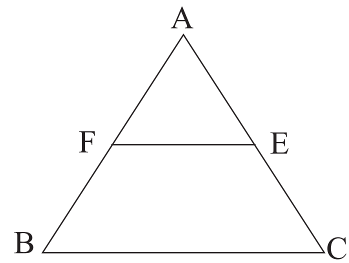
(ख) N ले AB लाई 3:1 को अनुपातमा बाहिरपट्टिबाट विभाजन गरेको छ भने N को स्थिति भेक्टर पत्ता लगाउनुहोस् ।

4. दुई विन्दुहरू A र B का स्थिति भेक्टरहरू क्रमशः $\overrightarrow{OA} = 6\vec{i} - 2\vec{j}$ र $\overrightarrow{OB} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ छन् ।

(क) P ले AB लाई 3 : 1 को अनुपातमा भित्रबाट विभाजन गरेको छ भने P को स्थिति भेक्टर पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) Q ले AB लाई 2 : 1 को अनुपातमा बाहिरपट्टिबाट विभाजन गरेको छ भने Q को स्थिति भेक्टर पत्ता लगाउनुहोस् ।

5. ΔABC मा भुजाहरू AB र AC का मध्यविन्दुहरू क्रमशः F र E हुन् ।



(क) भेक्टरमा मध्यविन्दु साध्यको कथन लेख्नुहोस् ।

(ख) त्रिभुजको जोडको नियम प्रयोग गरी $\overrightarrow{BC}$ लाई $\overrightarrow{AB}$ र $\overrightarrow{AC}$ को पदमा व्यक्त गर्नुहोस् ।

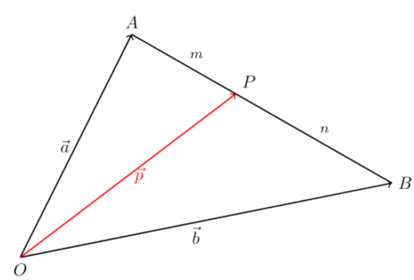
(ग) भेक्टर विधिबाट प्रमाणित गर्नुहोस् :

$\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$ (अथवा, $\overrightarrow{FE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$)

(घ) यदि D भुजा BC को मध्यविन्दु हो भने प्रमाणित गर्नुहोस् कि $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = 0$ हुन्छ ।

6. विन्दु A र B का स्थिति भेक्टरहरू $\vec{a}$ र $\vec{b}$ छन् । विन्दु P ले AB लाई $m{:}n$ अनुपातमा भित्री विभाजन गर्छ ।

(क) भित्री विभाजन गर्ने विन्दु P को स्थिति भेक्टर $\vec{p}$ निकाल्ने सूत्र लेख्नुहोस् ।



(ख) चित्रमा AP : PB = $m{:}n$ लाई भेक्टरका रूपमा $n\overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{PB}$ किन लेखिन्छ ? कारण दिनुहोस् ।

(ग) यदि $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j}$ र $\vec{b} = 4\vec{i} + 8\vec{j}$ भए, AB लाई 1:2 को अनुपातमा भित्री विभाजन गर्ने विन्दुको स्थिति भेक्टर पत्ता लगाउनुहोस् ।

(घ) कुन अवस्थामा $\vec{p} = \dfrac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$ हुन्छ, कारण दिनुहोस् ।

7. विन्दु P ले विन्दु $\vec{a}$ र $\vec{b}$ लाई जोड्ने रेखाखण्डलाई बाहिरबाट $m : n$ को अनुपातमा विभाजन गर्छ ।

(क) बाहिरी विभाजनका लागि स्थिति भेक्टर $\vec{p}$ निकाल्ने सूत्र लेख्नुहोस् ।

(ख) भेक्टर विधिबाट प्रमाणित गर्नुहोस् : $\vec{p} = \dfrac{m\vec{b} - n\vec{a}}{m - n}$

(ग) यदि $\vec{a} = \vec{i} + 4\vec{j}$ र $\vec{b} = 5\vec{i} - 3\vec{j}$ भए, AB लाई 1 : 2 को अनुपातमा बाहिरबाट विभाजन गर्ने विन्दुको स्थिति भेक्टर पत्ता लगाउनुहोस् ।

(घ) यदि $m:n = 1:1$ भयो भने बाहिरी विभाजन विन्दु P को अस्तित्व रहन्छ कि रहँदैन, तर्कसहित व्याख्या गर्नुहोस् ।

8. भेक्टर विधिबाट प्रमाणित गर्नुहोस् :

(क) चतुर्भुजका भुजाहरूका मध्यविन्दुहरूलाई क्रमशः जोड्दै जाँदा बन्ने चतुर्भुज एउटा समानान्तर चतुर्भुज हुन्छ ।

(ख) अर्धवृत्तमा बनेको कोण एक समकोण हुन्छ ।

उत्तर

1. (क) c (ख) b (ग) c (घ) b (ङ) b 2. (क) $4\vec{i}+2\vec{j}$ (ख) $4\vec{i}+2\vec{j}$

3. (क) $\frac{12}{5}\vec{i}-\vec{j}$ (ख) $\frac{7}{2}\vec{i}+\frac{19}{2}\vec{j}$ 4. (क) $3\vec{i}+\frac{7}{4}\vec{j}$ (ख) $-2\vec{i}+8\vec{j}$

5.– 6. (क) र (ख) शिक्षकलाई देखाउनुहोस् । (ग) $2\vec{i}+4\vec{j}$

7. (क) र (ख) शिक्षकलाई देखाउनुहोस् । (ग) $3\vec{i}+5\vec{j}$ (घ) शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

8. (क) र (ख) शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

मिश्रित अभ्यास – विषयक्षेत्रगत

1. दुईओटा भेक्टरहरू $\vec{a} = 3\vec{i}+4\vec{j}$ र $\vec{b} = x\vec{i}-2\vec{j}$ छन् ।

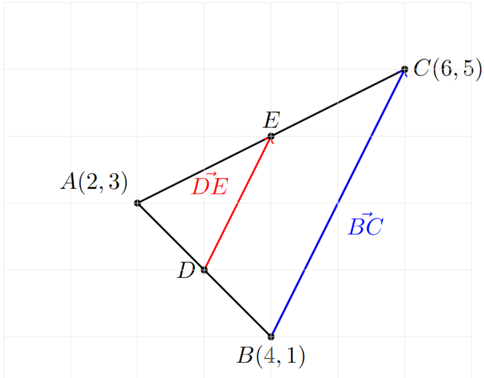
(क) यदि $\vec{a} = (x_1, y_1)$ र $\vec{b} = (x_2, y_2)$ छ भने $\vec{a}.\vec{b}$ लाई $\vec{i}$ र $\vec{j}$ का रूपमा लेख्नुहोस् ।

(ख) यदि $\vec{a}$ र $\vec{b}$ भेक्टर लम्ब भए x को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) x को मान कति हुँदा $\vec{b}$ ले Y-अक्षसँग 45° कोण बनाउँछ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(घ) यदि विन्दुहरू A र B का स्थिति भेक्टरहरू $2\vec{i}+4\vec{j}$ र $4\vec{i}-2\vec{j}$ भए रेखा AB को मध्यविन्दुको स्थिति भेक्टर पत्ता लगाउनुहोस् ।

2. त्रिभुज ABC मा विन्दुहरूको स्थिति भेक्टर $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i}+3\vec{j}$, $\overrightarrow{OB} = 4\vec{i}+\vec{j}$ र $\overrightarrow{OC} = 6\vec{i}+5\vec{j}$ छन् ।



(क) यदि D विन्दु A र B को मध्यविन्दु हो भने $\overrightarrow{OD}$ लाई $\vec{i}$ र $\vec{j}$ का रूपमा व्यक्त गर्नुहोस् ।

(ख) यदि E विन्दु A र C को मध्यविन्दु हो भने $\overrightarrow{OE}$ लाई $\vec{i}$ र $\vec{j}$ का रूपमा व्यक्त गर्नुहोस् ।

(ग) भेक्टर विधिबाट $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

(घ) के $\overrightarrow{DE}$ र $\overrightarrow{BC}$ समानान्तर छन्, पुष्टि गर्नुहोस् ।

3. विन्दु P र Q का स्थिति भेक्टरहरू $\vec{p} = 2\vec{i} + \vec{j}$ र $\vec{q} = \vec{i} - 3\vec{j}$ छन् । विन्दु R ले PQ लाई 3 : 2 को अनुपातमा विभाजन गर्छ ।

(क) दुईओटा विन्दुहरू जोड्ने रेखालाई $m : n$ को अनुपातमा विभाजन गर्ने विन्दुको स्थिति भेक्टर निकाल्ने सूत्र लेख्नुहोस् ।

(ख) विन्दु R को स्थिति भेक्टर $\vec{r}$ पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) $\angle$POR को मान पत्ता लगाउनुहोस ।

(घ) $\angle$POR र $\angle$QOR तुलना गर्नुहोस् ।

4. विन्दु A र B का स्थिति भेक्टरहरू क्रमश: $3\vec{i} + 2\vec{j}$ र $\vec{i} - 4\vec{j}$ छन् । विन्दु P ले AB लाई बाहिरबाट 2 : 3 को अनुपातमा विभाजन गर्छ ।

(क) दुईओटा विन्दुहरू जोड्ने रेखालाई m : n को अनुपातमा बाहिरबाट विभाजन गर्ने विन्दुको स्थिति भेक्टर निकाल्ने सूत्र लेख्नुहोस् ।

(ख) विन्दु P को स्थिति भेक्टर पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) यदि $m > n$ भए बाहिरी विभाजन गर्ने विन्दु P, विन्दु A वा B मध्ये कुनबाट नजिक हुन्छ, कारणसहित लेख्नुहोस् ।

(घ) $\angle$AOB को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

उत्तर

1. (क) $x_1 x_2 + y_1 y_2$ (ख) $\frac{8}{3}$ (ग) ±2 (घ) $3\vec{i} + \vec{j}$

2. (क) $\overrightarrow{OD} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$; $\overrightarrow{OE} = 4\vec{i} + 4\vec{j}$ (ख) - (घ) शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

3. (क) $\frac{n\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OB}}{m+n}$ ख) $7/5(\vec{i} - \vec{j})$ (ग) $\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{10}}$ (घ) शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

4. (क) $\frac{n\vec{b} - m\vec{a}}{m-n}$ (ख) $7\vec{i} + 14\vec{j}$ (ग) शिक्षकलाई देखाउनुहोस् । (घ) $\cos^{-1}\frac{-5}{\sqrt{221}}$

परियोजना कार्य

ठुलो ग्राफपेपरमा X-अक्ष र Y-अक्ष कोर्नुहोस्। सो ग्राफपेपरमा एउटा सहरको डिजाइन गर्नुहोस्। उक्त सहरका चारओटा मुख्य स्थानहरू तोक्नुहोस् र तिनलाई ग्राफमा अङ्कित गर्नुहोस्।

(क) विद्यालय (A) : कुनै एक निर्देशाङ्कमा (जस्तै : $2\vec{i} + 5\vec{j}$)

(ख) अस्पताल (B) : (जस्तै : $6\vec{i} + 2\vec{j}$)

(ग) सिनेमा हल (C) : (जस्तै : $3\vec{i} + 4\vec{i}$)

(घ) खेल मैदान (D) : (जस्तै : $2\vec{i} - 3\vec{j}$)

(अ) दुई ठाउँका बिचमा एउटा 'पुस्तकालय' कहाँ राख्ने भनेर हिसाब गरी डिजाइन गर्नुहोस्।

(आ) दुईओटा बाटो एकआपसमा लम्ब (90°) छन् कि छैनन्, पत्ता लगाउनुहोस्।

पाठ 11 तथ्याङ्कशास्त्र (Statistics)

11.1. परिचय (Introduction)

कुनै पनि तथ्याङ्कको सङ्कलन, विश्लेषण, व्याख्या तथा प्रस्तुतीकरण गर्ने गणितको शाखालाई तथ्याङ्कशास्त्र भनिन्छ । तथ्याङ्कशास्त्रको इतिहास मानव सभ्यता जत्तिकै पुरानो छ । सुरुआती समयमा तथ्याङ्कको प्रयोग मुख्यत: राज्य सञ्चालनका लागि गरिन्थ्यो । प्राचीनकालमा बेबिलोनिया, इजिप्ट र चीनमा जनसङ्ख्या एवम् स्रोतसाधनको गणना गर्न तथ्याङ्कशास्त्रको प्रयोग गरिन्थ्यो । John Graunt (1620 - 1674) ले लन्डनको मृत्युदर विश्लेषण गरी पहिलो पटक वैज्ञानिक ढङ्गले तथ्याङ्क प्रस्तुत गरेका थिए । बिसौँ शताब्दीमा Sir Ronald A. Fisher ले आधुनिक तथ्याङ्कशास्त्रको जग बसालेका थिए । त्यसैले उनलाई तथ्याङ्कशास्त्रका पिता भनिन्छ । पछि Karl Pearson र William Sealy Gosset (1876 - 1937) ले यस क्षेत्रमा थप योगदान पुऱ्याएका थिए । आजको डिजिटल युगमा कम्प्युटर र बिग डेटा (big data) ले तथ्याङ्कशास्त्रलाई अझ शक्तिशाली र व्यापक बनाएको छ साथै विज्ञान प्रविधिलगायत सबै क्षेत्रमा तथ्याङ्कशास्त्रको प्रयोग भएको पाइन्छ ।

विचरणशीलता (Dispersion)

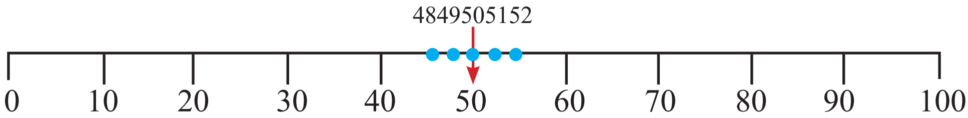
तथ्याङ्कशास्त्रमा कुनै पनि तथ्याङ्कको समूह अध्ययन गर्दा हामी प्राय: केन्द्रीय प्रवृत्तिको मापन (measure of central tendency) पत्ता लगाएर सुरु गर्छौं, जस्तै : मध्यक (mean), मध्यिका (median), वा रीति (mode)। यी मापनहरूले तथ्याङ्कको केन्द्र वा एउटा औसत अवस्थालाई प्रतिनिधित्व गर्छन् । केन्द्रीय प्रवृत्तिको मापनले धेरै जानकारीहरूलाई सरल र अर्थपूर्ण तरिकाले बुझ्न मदत गर्छ ।

यद्यपि, केन्द्रीय प्रवृत्तिको मापनले मात्रै सधैँ तथ्याङ्कका बारेमा पूरै तथ्य बताउन सक्दैन । दुई वा बढी तथ्याङ्कहरूको केन्द्रीय मान एउटै भए तापनि तिनीहरूको वितरण (distribution) वा अङ्कहरूको फैलावट धेरै फरक हुन सक्छ । उदाहरणका लागि दिइएका तीनओटा फरक कक्षाका विद्यार्थीले प्राप्त गरेका अङ्कहरूलाई विचार गरौं :

समूह A का विद्यार्थीहरूको प्राप्ताङ्क	४८	४९	५०	५१	५२	५०
समूह B का विद्यार्थीहरूको प्राप्ताङ्क	४०	४५	५०	५५	६०	५०
समूह C का विद्यार्थीहरूको प्राप्ताङ्क	२०	३५	५०	६५	८०	५०

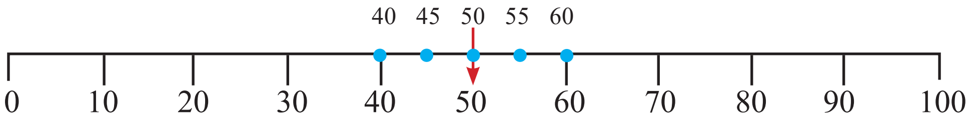
तथ्याङ्क A: कम भिन्नता

मध्यक = 50



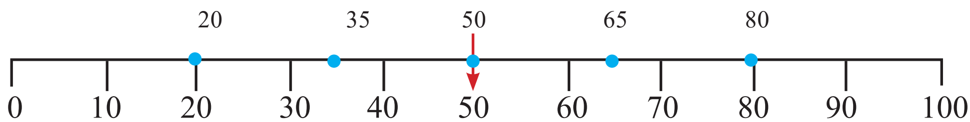
तथ्याङ्क B: मध्यम भिन्नता

मध्यक = 50



तथ्याङ्क C: उच्च भिन्नता

मध्यक = 50



चित्रमा देखाइएअनुसार यी तीनओटै तथ्याङ्कको औसत 50 भए पनि यिनीहरूको प्रकृति फरक छ :

(क) तथ्याङ्क A (कम भिन्नता - low variation) : यहाँ सबै अङ्कहरू मध्यक (५०) को धेरै नजिक छन् । यसले विद्यार्थीहरूको उपलब्धि लगभग समान रहेको देखाउँछ ।

(ख) तथ्याङ्क B (मध्यम भिन्नता - moderate variation) : यहाँ अङ्कहरू ठिक्कको दुरीमा फैलिएका छन् ।

(ग) तथ्याङ्क C (उच्च भिन्नता - high variation) : यहाँ अङ्कहरू धेरै टाढा टाढा फैलिएका छन्, जसले विद्यार्थीको उपलब्धिमा ठुलो अन्तर रहेको देखाउँछ ।

यदि हामीले मध्यकलाई मात्र हेर्यौं भने यी तीनओटै समूह का विद्यार्थीको उपलब्धि समान छ भन्ने गलत निष्कर्ष निस्कन सक्छ । यी तथ्याङ्कलाई एकअर्काबाट भिन्न बनाउने मुख्य कुरा तिनीहरूको फैलावट वा भिन्नता (degree of spread or variation) हो ।

कुनै पनि तथ्याङ्कका अवलोकनहरू (observations) एकअर्काबाट वा केन्द्रीय मानबाट कति फरक छन् भन्ने कुरालाई विचरणशीलता भनिन्छ । विचरणशीलताको मापनले यो फैलावटलाई मात्रात्मक रूपमा व्यक्त गर्छ र हामीलाई तथ्याङ्कको वितरण स्पष्ट रूपमा बुझ्न मदत गर्छ ।

विचरणशीलताको मापनले हामीलाई निम्नलिखित पक्षहरूमा मदत गर्छ :

(क) तथ्याङ्क कत्तिको एकरूप (consistent) वा परिवर्तनशील (variable) छ भनी निर्धारण गर्न ।

(ख) दुई वा सोभन्दा बढी तथ्याङ्कहरूको विश्वसनीयता (reliability) तुलना गर्न ।

(ग) केन्द्रीय प्रवृत्तिले तथ्याङ्कलाई कत्तिको राम्ररी प्रतिनिधित्व गर्छ भनी जाँच्न ।

(घ) शिक्षा, व्यवसाय, अर्थशास्त्र र विज्ञान जस्ता क्षेत्रहरूमा निर्णय लिनका लागि गहिरो अन्तर्दृष्टि प्राप्त गर्न ।

यसरी, केन्द्रीय प्रवृत्तिको मापनले तथ्याङ्कको केन्द्र (centre) को वर्णन गर्छ भने विस्तारको मापनले तथ्याङ्कको फैलावट (spread) लाई बुझाउँछ । कुनै पनि तथ्याङ्कलाई पूर्ण रूपमा बुझ्न यी दुबै आवश्यक छन् ।

11.2 चतुर्थांशीय विचलन (Quartile Deviation)

क्रियाकलाप 1

तलका प्रश्नहरूमा छलफल गर्नुहोस् :

(क) तपाईंको कक्षामा भएका सबै जना विद्यार्थीहरूको उचाइ सेन्टिमिटरमा नापेर बोर्डमा लेख्नुहोस् ।

(ख) सो उचाइको तथ्याङ्कलाई तालिकामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

(ग) सो तथ्याङ्कको मध्यक, मध्यिका, पहिलो चतुर्थांश, तेस्रो चतुर्थांशको, चतुर्थांशीय विचलन र यसको गुणाङ्कको मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(घ) के कुनै तथ्याङ्क मध्यविन्दुबाट कति फैलिएको छ भनेर मापन गर्न विस्तार (range), चतुर्थांशीय विचलन (quartile deviation), मध्यक भिन्नता (mean deviation), स्तरीय भिन्नता (standard deviation), मध्यक भिन्नता (mean deviation) र यिनका गुणाङ्कको गणना गर्न सकिन्छ ?

क्रियाकलाप 2

एउटा कक्षाका 40 जना विद्यार्थीको तौल (kg) मा यस प्रकार दिइएको छ । उक्त तथ्याङ्कको अध्ययन गर्नुहोस् ।

40	40.5	45	47	60	61	56.4	39.5	56	52
42	62.5	69.5	42	43	46	55	56.5	35	51
58	61	49	57	51	59	47	52	57	59.5
48.5	58	54	67	46	56	39	48	51	60

(क) माथिको तथ्याङ्कलाई तालिकामा प्रस्तुत कसरी गर्ने होला, छलफल गर्नुहोस् ।

(ख) यदि हामीले हरेक तौललाई छुट्टाछुट्टै लेख्यौँ भने तालिका कस्तो बन्ला ?

(ग) माथिको तथ्याङ्कलाई 5 वर्गान्तर (class interval) मा बाँडेर हेरौँ ।

तौल (kg मा)	मिलान चिह्न	विद्यार्थी सङ्ख्या
35 - 40	||	2
40 - 45	~~||||~~ |	6
45 - 50	...	8
50 - 55	...	6
55 - 60	...	11
60 - 65	...	5
65 - 70	...	2

यहाँ, 55 - 60 भन्नाले 55 kg देखि 60 kg भन्दा कम तौल भन्ने बुझिन्छ, जस्तै : 55, 56, 56.5, 57, 58, 59, 59.5 तर 60 चाहिँ 55 - 60 मा पर्दैन, 60 - 65 मा पर्छ ।

पूर्ण सङ्ख्यामा मात्र नभई दशमलवमा पनि व्यक्त हुने र निश्चित अन्तरालमा फैलिएको तथ्याङ्कलाई अविच्छिन्न श्रेणी (continuous series) भनिन्छ ।

11.3 अविच्छिन्न श्रेणीको चतुर्थांशीय विचलन (Quartile Deviation of Continuous Series)

चतुर्थांशीय विचलन र यसको गुणाङ्क (Quartile Deviation / Semi Interquartile Range and its Coefficient)

क्रियाकलाप 3

एउटा कक्षाको गणित विषयको परीक्षामा प्राप्त गरेको प्राप्ताङ्कलाई तल तालिकामा दिइएको छ । समूहमा छलफल गरी (क) पहिलो चतुर्थांश (ख) तेस्रो चतुर्थांश (ग) चतुर्थांशीय विचलन र (घ) चतुर्थांशीय विचलनको गुणाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

प्राप्ताङ्क	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70
विद्यार्थी सङ्ख्या	2	5	10	11	5	2

विचारणीय प्रश्न : के चतुर्थांशीय विचलनको गुणाङ्कको मान 1 भन्दा ठुलो हुन सक्छ ?

दिइएको तथ्याङ्कलाई तल 25 % र माथि 75 % भागमा विभाजन गर्ने मानलाई पहिलो चतुर्थांश भनिन्छ । 50 % र 50 % भागमा विभाजन गर्ने मानलाई मध्यिका र दोस्रो चतुर्थांश भनिन्छ भने तल 75 % र माथि 25 % भागमा विभाजन गर्ने मानलाई तेस्रो चतुर्थांश भनिन्छ ।

तेस्रो वा माथिल्लो चतुर्थांश र पहिलो वा तल्लो चतुर्थांशको फरकलाई चतुर्थांशबिचको विस्तार भनिन्छ । अर्थात् चतुर्थांशबिचको विस्तार (interquartile range) = $Q_3 - Q_1$ हुन्छ । तेस्रो वा

माथिल्लो चतुर्थांश र पहिलो वा तल्लो चतुर्थांशको भिन्नताको आधालाई चतुर्थांशीय भिन्नता वा चतुर्थांशीय विचलन भनिन्छ अर्थात् चतुर्थांशीय विचलन (Q.D.) $= \frac{Q_3 - Q_1}{2}$ र Q.D. को गुणाङ्क $= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$ हुन्छ ।

उदाहरण 1

दिइएको तथ्याङ्कबाट चतुर्थांशीय विचलन र यसको गुणाङ्क गणना गर्नुहोस् :

ज्याला (सय रुपियाँमा)	6 - 8	8 - 10	10 - 12	12 - 14	14 - 16	16 - 18
कामदार सङ्ख्या	60	75	85	70	50	10

समाधान

यहाँ, चतुर्थांशीय विचलन र यसको गुणाङ्क गणना

ज्याला (सय रुपियाँमा)	कामदार सङ्ख्या (f)	सञ्चित बारम्बारता (cf)
6 - 8	60	60
8 - 10	75	135
10 - 12	85	220
12 - 14	70	290
14 - 16	50	340
16 - 18	10	350
	N = 350	

Q_1 पर्ने वर्गान्तर $= \left(\frac{N}{4}\right)$ औँ पद $= \left(\frac{350}{4}\right)$ औँ पद $= (87.5)$ औँ पद

सञ्चित बारम्बारता तालिकाअनुसार (87.5) औँ पद पर्ने वर्गान्तर 8 – 10 हुन्छ, त्यसैले Q_1 पर्ने वर्गान्तर पनि 8 - 10 हुन्छ ।

$$Q_1 = l + \frac{\frac{N}{4} - cf}{f} \times i \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

जहाँ, $l = 8$

$f = 75$

$cf = 60$

$i = 10 - 8 = 2$

अब, (1) बाट,

$$Q_1 = 8 + \frac{87.5 - 60}{75} \times 2$$

$$= 8 + 0.73 \quad = 8.73$$

Q_3 पर्ने वर्गान्तर $= \left(\frac{3N}{4}\right)$ औँ पद $= \left(\frac{3 \times 350}{4}\right)$ औँ पद $= (262.5)$ औँ पद

सञ्चित बारम्बारता तालिकाअनुसार (262.5) औँ पद पर्ने वर्गान्तर 12 - 14 हुन्छ, त्यसैले Q_3 पर्ने वर्गान्तर पनि 12 - 14 हुन्छ ।

$$Q_3 = l + \frac{\frac{3N}{4} - cf}{f} \times i$$

$$Q_3 = 12 + \frac{262.5 - 220}{70} \times 2$$

$$= 12 + 1.21 = 13.21$$

चतुर्थांशीय विचलन (Q.D.) $= \frac{Q_3 - Q_1}{2}$

$$= \frac{13.21 - 8.73}{2} = \frac{4.48}{2} = 2.24$$

Q.D. को गुणाङ्क $= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$

$$= \frac{13.21 - 8.73}{13.21 + 8.73}$$

$$= \frac{4.48}{21.94} = 0.20$$

अत: चतुर्थांशीय विचलन (Q.D.) = 2.24 र Q.D. को गुणाङ्क = 0.20

उदाहरण 2

दिइएको तथ्याङ्कबाट चतुर्थांशीय विचलन र यसको गुणाङ्क गणना गर्नुहोस् :

काम गर्ने समय (घण्टामा)	2 भन्दा कम	4 भन्दा कम	6 भन्दा कम	8 भन्दा कम	10 भन्दा कम	12 भन्दा कम
कामदार सङ्ख्या	5	7	8	15	25	30

समाधान

काम गर्ने समय (घण्टामा)	कामदार सङ्ख्या (f)	सञ्चित बारम्बारता (cf)
2 भन्दा कम	5	5
2 - 4	7 – 5 = 2	7
4 - 6	8 – 7 =1	8
6 - 8	15 – 8 = 7	15
8 - 10	25 – 15 = 10	25
10 - 12	30 – 25 = 5	30
	N = 30	

Q_1 पर्ने वर्गान्तर $= \left(\frac{N}{4}\right)$ औँ पद $= \left(\frac{30}{4}\right)$ औँ पद $= (7.5)$ औँ पद

सञ्चित बारम्बारता तालिकाअनुसार (7.5) औँ पद पर्ने वर्गान्तर 4 - 6 हुन्छ, त्यसैले Q_1 पर्ने वर्गान्तर पनि 4 – 6 हुन्छ ।

$$Q_1 = l + \frac{\frac{N}{4} - cf}{f} \times i$$

$$Q_1 = 4 + \frac{7.5 - 7}{1} \times 2 = 4 + 1 = 5$$

Q_3 पर्ने वर्गान्तर $= \left(\frac{3N}{4}\right)$ औँ पद $= \left(\frac{3 \times 30}{4}\right)$ औँ पद (22.5) औँ पद

सञ्चित बारम्बारता तालिकाअनुसार (8.75) औँ पद पर्ने वर्गान्तर 8 - 10 हुन्छ, त्यसैले Q_3 पर्ने वर्गान्तर पनि 8 - 10 हुन्छ ।

$$Q_3 = l + \frac{\frac{3N}{4} - cf}{f} \times i$$

$$Q_3 = 8 + \frac{22.5 - 15}{10} \times 2 = 8 + 1.5 = 9.5$$

चतुर्थांशीय विचलन (Q.D.) $= \frac{Q_3 - Q_1}{2}$

$$= \frac{9.5 - 5}{2} = \frac{4.5}{2} = 2.25$$

Q.D. को गुणाङ्क $= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$

$$= \frac{9.5 - 5}{9.5 + 5} = \frac{4.5}{14.5} = 0.31$$

अतः चतुर्थांशीय विचलन (Q.D.) = 2.25 र Q.D. को गुणाङ्क = 0.31

अभ्यास 11.1

1. **दिइएका प्रश्नहरूको उपयुक्त विकल्पमा ठिक चिहृन (✓) लगाउनुहोस् :**

(क) चतुर्थांशीय विचलनको अर्को नाम के हो ?

a. बिस्तार b. मध्यक भिन्नता c. स्तरीय भिन्नता d. अर्ध चतुर्थांशीय विस्तार

(ख) चतुर्थांशीय विचलनले श्रेणीका बिचको कति प्रतिशत तथ्याङ्कलाई समेट्छ ?

a. 25 % b. 50 % c. 75 % d. 100 %

(ग) चतुर्थांशीय विचलन (Q.D.) पत्ता लगाउने सूत्र कुन हो ?

a. $Q_3 - Q_1$ b. $\frac{Q_3 - Q_1}{2}$ c. $\frac{Q_3 + Q_1}{2}$ d. $\frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$

(घ) यदि $Q_1 = 10$ र $Q_3 = 30$ भए चतुर्थांशीय विचलनको मान कति हुन्छ ?

a. 10 b. 20 c. 30 d. 40

(ङ) चतुर्थांशीय विचलन गणना गर्दा कुन मानलाई बेवास्ता गरिन्छ ?

a. तथ्याङ्कका सबै मानहरूलाई b. बिचका 50% मानलाई

c. सुरुका 25% र अन्तिमका 25% मानहरूलाई d. औसत मानलाई

(च) यदि चतुर्थांशीय विचलन = 10 र माथिल्लो चतुर्थांश = 30 भए तल्लो चतुर्थांशको मान कति हुन्छ ?

a. 40 b. 30 c. 20 d. 10

2. दिइएको तथ्याङ्कबाट चतुर्थांशीय विचलन र यसको गुणाङ्क गणना गर्नुहोस् :

(क)

प्राप्ताङ्क	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50
विद्यार्थी सङ्ख्या	4	10	20	10	6

(ख)

ज्याला (रु. हजारमा)	0 - 5	5 - 10	10 - 15	15 - 20	20 - 25	25 - 30
कामदार सङ्ख्या	4	6	3	8	12	7

(ग)

तौल (kg)	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70	70 - 80	80 - 90
विद्यार्थी सङ्ख्या	4	5	10	15	8	7	1

(घ)

प्राप्ताङ्क	$0 \le x < 10$	$10 \le x < 20$	$20 \le x < 30$	$30 \le x < 40$	$40 \le x < 50$
विद्यार्थी सङ्ख्या	5	10	15	10	5

(ज)

प्राप्ताङ्क (भन्दा कम)	<20	<30	<40	<50	<60
विद्यार्थी सङ्ख्या	5	12	27	40	50

(झ)

ज्याला (भन्दा बढी) प्रतिघण्टा (रु.)	100	200	300	400	500
कामदार सङ्ख्या	100	80	60	40	20

3. एउटा कक्षाका 30 जना विद्यार्थीले गणित विषयमा प्राप्त गरेका प्राप्ताङ्कहरू दिइएको छ :

12	25	36	45	18	22	33	54	42	29
38	41	15	20	48	52	30	24	19	37
44	21	35	40	14	26	49	31	23	50

(क) पहिलो वर्गान्तर 10 - 20 लिएर दिइएको तथ्याङ्कलाई एउटा बारम्बारता तालिकामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

(ख) पहिलो चतुर्थांशको मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) तेस्रो चतुर्थांशको मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(घ) चतुर्थांशीय विचलन गणना गर्नुहोस् ।

(ङ) चतुर्थांशीय विचलनको गुणाङ्क निकाल्नुहोस् ।

उत्तर

1.	(क) d	(ख) b	(ग) b	(घ) a
	(ङ) b	(च) c	(छ) c	(ज) d

2. (क) 8.875,0.23 3. (घ) 10.22, (ङ) 0.307

11.4 मध्यक भिन्नता (Mean Deviation)

क्रियाकलाप 1

एउटा विद्यालयमा 75 पूर्णाङ्कको गणित विषयको परीक्षामा विद्यार्थीले प्राप्त गरेको प्राप्ताङ्क दिइएको छ :

प्राप्ताङ्क	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70
विद्यार्थी सङ्ख्या	5	7	8	10	6	4

(क) दिइएको तथ्याङ्कका आधारमा मान पत्ता लगाई तलको तालिका भर्नुहोस् :

प्राप्ताङ्क	विद्यार्थी सङ्ख्या (f)	मध्यमान (m)	fm	$D = m - \overline{X}$	$\lvert D\rvert = \lvert m - \bar{X}\rvert$	$f\lvert D\rvert$
10 - 20	5					
20 - 30	7					
30 - 40	8					
40 - 50	10					
50 - 60	6					
60 - 70	4					
	N =		$\Sigma fm =$		$\Sigma f\lvert D\rvert =$	

(ख) मध्यकबाट मध्यक भिन्नता पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) मध्यक भिन्नताको गुणाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

(घ) दिइएको तथ्याङ्कका आधारमा मान पत्ता लगाई तालिका भर्नुहोस् :

प्राप्ताङ्क	विद्यार्थी सङ्ख्या (f)	cf	मध्यमान (m)	$\lvert D\rvert = \lvert m - M_d\rvert$	$f\lvert D\rvert$
10 - 20	5				
20 - 30	7				
30 - 40	8				
40 - 50	10				
50 - 60	6				
60 - 70	4				
	N =			$\Sigma f\lvert D\rvert$ =	

(ङ) मध्यिकाबाट मध्यक भिन्नता पत्ता लगाउनुहोस् ।

(च) मध्यक भिन्नताको गुणाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

कुनै पनि तथ्याङ्कमा रहेका प्रत्येक पदहरू तिनीहरूको औसत (मध्यक, मध्यिका र रीत) बाट कति दुरीमा रहेका छन् भनेर निकालिने औसत नै मध्यक भिन्नता हो । यसले तथ्याङ्कहरूबिचको फैलावटलाई बुझाउँछ । मध्यक भिन्नता निकाल्दा पदहरूको र औसतको फरक धनात्मक वा ऋणात्मक जे भए पनि त्यसलाई धनात्मक नै मानिन्छ । यसका लागि निरपेक्ष मानको प्रयोग गरिन्छ ।

कुनै पनि तथ्याङ्कमा रहेका प्रत्येक पदहरू र तिनीहरूको मध्यक वा मध्यिकाबिचको फरकको निरपेक्ष मानको औसतलाई मध्यक भिन्नता भनिन्छ ।

मध्यक भिन्नताका लागि आवश्यक सम्बन्धहरू

(क) मध्यकबाट मध्यक भिन्नता (MD) $= \dfrac{\Sigma f\,|m - \overline{X}\,|}{N} = \dfrac{\Sigma\, f|D|}{N}$

(ख) मध्यकबाट मध्यक भिन्नताको गुणाङ्क $= \dfrac{\text{मध्यकबाट मध्यक भिन्नता}}{\text{मध्यक}} = \dfrac{\text{MD}}{\text{Mean}}$

(ग) मध्यिकाबाट मध्यक भिन्नता (MD) $= \dfrac{\Sigma f\,|m - Md\,|}{N} = \dfrac{\Sigma\, f|D|}{N}$

(घ) मध्यिकाबाट मध्यक भिन्नताको गुणाङ्क $= \dfrac{\text{मध्यिकाबाट मध्यक भिन्नता}}{\text{मध्यिका}} = \dfrac{\text{MD}}{\text{Median}}$

उदाहरण 1

एउटा विद्यालयका कक्षा 10 का 40 जना विद्यार्थीको तौल 35 kg देखि 70 भन्दा कम रहेछ । यसलाई तल तालिकामा दिइएको छ । सो तथ्याङ्कको मध्यकबाट मध्यक भिन्नता र यसको गुणाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

तौल (kg)	विद्यार्थी सङ्ख्या
35 भन्दा बढी	40
40 भन्दा बढी	36
45 भन्दा बढी	30
50 भन्दा बढी	20
55 भन्दा बढी	15
60 भन्दा बढी	10
65 भन्दा बढी	4

समाधान : यहाँ,

दिइएको तालिकाबाट

तौल	विद्यार्थी सङ्ख्या (f)	मध्यमान (m)	fm	$\|D\| = \|m - \bar{X}\|$	f$\|D\|$
35 - 40	40 – 36 = 4	37.5	150	14.375	57.5
40 - 45	36 – 30 = 6	42.5	255	9.375	56.25
45 - 50	30 – 20 = 10	47.5	475	4.375	43.75
50 - 55	20 – 15 = 5	52.5	262.5	0.625	3.125
55 - 60	15 – 10 = 5	57.5	287.5	5.625	28.123
60 - 65	10 – 4 = 6	62.5	375	10.625	63.75
65 - 70	4	67.5	270	15.625	62.5
	N = 40		$\Sigma fm = 2075$	Σ f$\|D\|$ = 315	

मध्यक $(\bar{X}) = \frac{\Sigma \text{ fm}}{N} = \frac{2075}{40} = 51.875$

मध्यकबाट मध्यक भिन्नता (MD) = $\frac{\Sigma \text{ f}|D|}{N} = \frac{315}{40} = 7.875$

मध्यकबाट मध्यक भिन्नताको गुणाङ्क $= \frac{\text{MD}}{\bar{X}} = \frac{7.875}{51.875} = 0.1518$ हुन्छ ।

अत: मध्यकबाट मध्यक भिन्नता = 7.875 र मध्यकबाट मध्यक भिन्नताको गुणाङ्क = 0.1518

अभ्यास 11.2

1. **दिइएका प्रश्नहरूको उपयुक्त विकल्पमा ठिक चिह्न (✓) लगाउनुहोस् :**

(क) मध्यक भिन्नता पत्ता लगाउने सूत्र कुन हो ?

a. $\frac{\Sigma fD}{N}$ b. $\frac{MD}{M_d}$ c. $\frac{MD}{Mean}$ d. $\frac{\Sigma f|D|}{N}$

(ख) यदि कुनै तथ्याङ्कको सबै पदहरू बराबर छन् भने मध्यक भिन्नता कति हुन्छ ?

a. 1 b. अनन्त c. 0 d. भन्न सकिँदैन

(ग) मध्यक भिन्नता केन्द्रीय प्रवृत्तिको कुन नापबाट गणना गर्न सकिन्छ ?

a. मध्यक b. मध्यिका c. रीत d. माथिका सबै

(घ) यदि $\Sigma f|m - \bar{X}| = 510$, $N = 30$ र मध्यक – 40 भए मध्यक भिन्नताको गुणाङ्क कति हुन्छ ?

a. 12.75 b. 17 c. 0.425 d. 0.75

2. **दिइएको तथ्याङ्कको मध्यकबाट मध्यक भिन्नता र यसको गुणाङ्क गणना गर्नुहोस् :**

(क)

तौल (kg)	0 - 4	4 - 8	8 - 12	12 - 16	16 - 20	20 - 24
बालबालिका सङ्ख्या	7	7	10	15	7	6

(ख)

प्राप्ताङ्क	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60
विद्यार्थी सङ्ख्या	8	12	20	40	12	8

3. **दिइएको तथ्याङ्कको मध्यिकाबाट मध्यक भिन्नता र यसको गुणाङ्क गणना गर्नुहोस् :**

(क)

तौल (kg)	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70	70 - 80
विद्यार्थी सङ्ख्या	7	12	18	28	16	14

(ख)

तौल (kg)	3 - 5	5 - 7	7 - 9	9 - 11	11 - 13
कुकुरको सङ्ख्या	1	4	6	4	1

4. एउटा विद्यालयमा 50 पूर्णाङ्कको गणित विषयको परीक्षामा 10 जना विद्यार्थीले प्राप्त गरेको प्राप्ताङ्क दिइएको छ । सो तथ्याङ्कको मध्यकबाट मध्यक भिन्नता र यसको गुणाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् :

प्राप्ताङ्क	10 भन्दा कम	20 भन्दा कम	30 भन्दा कम	40 भन्दा कम	50 भन्दा कम
विद्यार्थी सङ्ख्या	1	3	7	9	10

(क) सो तथ्याङ्कको मध्यकबाट मध्यक भिन्नता र यसको गुणाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) सो तथ्याङ्कको मध्यिकाबाट मध्यक भिन्नता र यसको गुणाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

5. एउटा कारखानामा काम गर्ने कामदारहरूको प्रतिघण्टा ज्याला रु. 100 देखि रु. 800 भन्दा कम रहेछ । यसलाई तालिकामा दिइएको छ । सो तथ्याङ्कको मध्यकबाट मध्यक भिन्नता र यसको गुणाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

प्रति घण्टा ज्याला	कामदार सङ्ख्या
100 भन्दा बढी	60
200 भन्दा बढी	56
300 भन्दा बढी	50
400 भन्दा बढी	40
500 भन्दा बढी	20
600 भन्दा बढी	10
700 भन्दा बढी	4

6. एउटा विद्यालयमा अध्ययनरत कक्षा 10 का 28 जना विद्यार्थीले गणित विषयको परीक्षामा प्राप्त गरेको प्राप्ताङ्क दिइएको छ :

15	62	50	70	74	34	60
41	14	48	28	38	64	21
57	40	34	30	47	20	75
45	56	29	22	13	53	66

(क) माथिको तथ्याङ्कलाई पहिलो वर्गान्तर 10 - 20 भएको बारम्बारता तालिकामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

(ख) मध्यकबाट मध्यक भिन्नता र यसको गुणाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) मध्यिकाबाट मध्यक भिन्नता र यसको गुणाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

उत्तर

1. (क) d (ख) c (ग) d (घ) c

2. (क) 5.08, 0.42 (ख) 10.40, 0.34 3.(क) 11.53, 0.21 (ख) 1.5, 0.1875

4. (क) 8, 0.32 (ख) 8, 0.32 5. 113.3, 0.25 6. (ख) 15.81, 0.35

(ग) 15.85, 0.36

परियोजना कार्य

आफ्नो कक्षाका साथीहरूले गणित विषयको दुईओटा एकाइ परीक्षामा प्राप्त गरेका प्राप्ताङ्क सङ्कलन गर्नुहोस् :

(क) उक्त प्राप्ताङ्कलाई उपयुक्त श्रेणी अन्तर राखी बारम्बारता तालिकामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

(ख) औसत प्राप्ताङ्क गणना गर्नुहोस् ।

(ग) औसत प्राप्ताङ्कका आधारमा तुलना गर्नुहोस् ।

(घ) चतुर्थांशीय विचलन पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ङ) मध्यक भिन्नता र यसको गुणाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

(च) मध्यक भिन्नताका आधारमा कसरी तुलना गर्ने होला ?

11.4 स्तरीय भिन्नता (Standard Deviation)

क्रियाकलाप 1

कुनै एउटा परीक्षामा दुई जना विद्यार्थीको प्राप्ताङ्क दिइएको छ । यी प्राप्ताङ्कको अध्ययन गरी दिइएका प्रश्नहरूमा छलफल गर्नुहोस् :

विद्यार्थी A: 68, 70, 72, 69, 71, 70, 70

विद्यार्थी B: 40, 95, 50, 90, 60, 70, 80

(क) कुन विद्यार्थीको नतिजा राम्रो छ ?

(ख) कुन विद्यार्थीको नतिजा राम्रो छ भनेर कसरी थाहा पाउन सकिन्छ ?

(ग) विद्यार्थी A र B को औसत प्राप्ताङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

(घ) दुवै विद्यार्थीको औसत प्राप्ताङ्क समान भएको अवस्थामा कसरी तुलना गर्न सकिन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

ङ) बिद्यार्थी A र B प्राप्ताङ्कको स्तरीय भिन्नता प्राप्ताङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

माथि दिइएका विद्यार्थी A र B दुबैको औसत प्राप्ताङ्क 70 हुन्छ । तर उनीहरूको प्राप्ताङ्कको प्रकृति उस्तै छैन । विद्यार्थी A ले सबै विषयमा उस्तै उस्तै अङ्क ल्याएको छ तर विद्यार्थी B ले कुनै विषयमा उच्च अङ्क ल्याएको छ भने कुनै विषयमा न्यून अङ्क ल्याएको छ ।

बिद्यर्थी A को प्राप्ताङ्कको स्तरीय भिन्नता 1.19 र बिद्यार्थी B को प्राप्ताङ्कको स्तरीय भिन्नता 19.45 हुन्छ । यसरी एउटै औसत मान र फरक स्तरीय भिन्नता भएमा के निष्कर्ष निकाल्न सक्नुहुन्छ ?

कुनै पनि तथ्याङ्क आफ्नो औसतबाट कति टाढा वा नजिक छरिएर रहेको छ भनेर मापन गर्ने विचरणशीलताको नापलाई स्तरीय भिन्नता भनिन्छ । स्तरीय भिन्नतालाई विचरणशीलताको नापहरू (विस्तार, चतुर्थांशीय विचलन, मध्यक भिन्नता र स्तरीय भिन्नता) मध्ये सबैभन्दा बढी प्रयोग गरिने र सबैभन्दा स्तरीय नापका रूपमा मानिन्छ । स्तरीय भिन्नतालाई सामान्यतः ग्रिक भाषाको अक्षर σ (small sigma) ले जनाइन्छ । स्तरीय भिन्नताको वर्गलाई Variance भनिन्छ र सङ्केतमा σ^2 लेखिन्छ ।

विचारणीय प्रश्न : स्तरीय भिन्नतालाई किन सबैभन्दा उपयुक्त विचरणशीलताको नापका रूपमा लिइन्छ ?

11.4.1 स्तरीय भिन्नताको प्रयोग (Uses of Standard Deviation)

स्तरीय भिन्नतालाई विचरणशीलताका नापहरूमध्ये महत्त्वपूर्ण नापका रूपमा लिइनुका साथै धेरै क्षेत्रमा यसको प्रयोग गरिन्छ, जस्तै :

(क) शिक्षा क्षेत्र : विद्यार्थीको परीक्षाको नतिजामा कत्तिको समानता छ वा भिन्नता छ, तुलना गर्न ।

(ख) मौसम पूर्वानुमान : तापक्रम वा वर्षाको औसत उतारचढाव मापन गर्न ।

(ग) सेयर बजार : कुनै स्टक वा लगानीमा कत्तिको जोखिम छ भनेर पत्ता लगाउन ।

(घ) गुणस्तर नियन्त्रण : कारखानाबाट उत्पादित सामानहरू एउटै गुणस्तरका छन् कि छैनन् भनेर निश्चित गर्न ।

11.4.2 स्तरीय भिन्नताको गुणाङ्क (Coefficient of Standard Deviation)

स्तरीय भिन्नतालाई मध्यकले भाग गर्दा आउने मानलाई स्तरीय भिन्नताको गुणाङ्क भनिन्छ । फरक फरक एकाइ भएका तथ्याङ्कहरूको तुलना गर्न स्तरीय भिन्नताको गुणाङ्क आवश्यक हुन्छ । स्तरीय भिन्नताको गुणाङ्क तुलनात्मक रूपमा जति सानो हुन्छ त्यति नै तथ्याङ्कको वितरणमा बढी एकरूपता वा स्थिरता भएको मानिन्छ । त्यस्तै स्तरीय भिन्नताको गुणाङ्क जति ठुलो हुन्छ त्यति नै तथ्याङ्कको वितरणमा कम एकरूपता वा स्थिरता तथा बढी विविधता भएको मानिन्छ । यसका लागि निम्नलिखित सूत्र प्रयोग गरिन्छ :

स्तरीय भिन्नताको गुणाङ्क $= \dfrac{\sigma}{\overline{X}}$

11.5 विचरणशीलताको गुणाङ्क (Coefficient of Variation)

स्तरीय भिन्नताको गुणाङ्कको प्रतिशतलाई नै विचरणशीलताको गुणाङ्क (coefficient of variation) भनिन्छ । स्तरीय भिन्नताको गुणाङ्क 0 देखि 1 सम्म हुने भएकाले यसलाई प्रतिशतमा बदलेर प्रयोग गर्ने गरिन्छ । यसलाई सङ्केतमा C.V. लेखिन्छ । यसमा पनि स्तरीय भिन्नताको गुणाङ्कमा जस्तै विचरणशीलताको गुणाङ्क तुलनात्मक रूपमा जति सानो हुन्छ त्यति नै तथ्याङ्कको बितरणमा बढी एकरूपता वा स्थिरता भएको मानिन्छ । त्यस्तै विचरणशीलताको गुणाङ्क जति ठुलो हुन्छ त्यति नै तथ्याङ्कको वितरणमा कम एकरूपता, कम स्थिरता वा बढी विविधता भएको मानिन्छ ।

यसका लागि निम्नलिखित सूत्र प्रयोग गरिन्छ :

विचरणशीलताको गुणाङ्क (C.V.) $= \frac{\sigma}{\overline{X}} \times 100\%$

अविच्छिन्न श्रेणीको स्तरीय भिन्नता (Standard Deviation of Continuous Series)

अविच्छिन्न श्रेणीको स्तरीय भिन्नता पत्ता लगाउने विधिहरू यस प्रकार छन् :

वास्तविक मध्यक विधि (Actual Mean Method)

यो विधिमा तथ्याङ्कको वास्तविक मध्यक र मध्यमानको फरक निकालेर स्तरीय भिन्नता गणना गरिन्छ । यसका लागि दिइएको सूत्र प्रयोग गरिन्छ :

स्तरीय भिन्नता $(\sigma) = \sqrt{\frac{\Sigma f(m-\overline{X})^2}{N}}$ ……………… (i)

जहाँ, m = मध्यमान , N = बारम्बारताको योगफल र $\overline{X}$ = मध्यक हुन्छ ।

स्तरीय भिन्नता गणना गर्ने चरणहरू

(क) वर्गान्तरको मध्यमान (m) पत्ता लगाउने ।

(ख) प्रत्येक f र तिनीहरूको सङ्गति m गुणन गरेर fm र fm को योगफल Σfm पत्ता लगाउने ।

(ग) मध्यक $(\overline{X})$ पत्ता लगाउने ।

(घ) प्रत्येक m बाट $\overline{X}$ घटाएर $(m - \overline{X})$ गणन गरी तिनीहरूको वर्ग $(m-\overline{X})^2$ पत्ता लगाउने ।

(ङ) प्रत्येक $(m-\overline{X})^2$ र तिनीहरूको सङ्गति f गुणन गरेर $f(m-\overline{X})^2$ पत्ता लगाउने ।

(च) $f(m-\overline{X})^2$ हरूको योगफल $\Sigma f(m-\overline{X})^2$ पत्ता लगाउने ।

(छ) माथि दिइएको सूत्र (i) प्रयोग गरी स्तरीय भिन्नता पत्ता लगाउने ।

उदाहरण 1

दिइएको तथ्याङ्कबाट वास्तविक मध्यक विधिबाट स्तरीय भिन्नता र यसको गुणाङ्कको गणना गर्नुहोस् :

तलब (रु. हजारमा)	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60
कर्मचारी सङ्ख्या	8	12	20	40	12	8

समाधान

तलब	कर्मचारी सङ्ख्या (f)	मध्यमान (m)	fm	$(m-\overline{X})^2$ $(m-31)^2$	$f(m-\overline{X})^2$
0 - 10	8	5	40	676	5408
10 - 20	12	15	180	256	3072
20 - 30	20	25	500	36	720
30 - 40	40	35	1400	16	640
40 - 50	12	45	540	196	2352
50 - 60	8	55	440	576	4608
	N = 100		$\Sigma fm =$ 3100		$\Sigma fm^2 =$ 16800

मध्यक $(\overline{X}) = \dfrac{\Sigma fm}{N} = \dfrac{3100}{100} = 31$

स्तरीय भिन्नता $(\sigma) = \sqrt{\dfrac{\Sigma f(m-\overline{X})^2}{N}} = \sqrt{\dfrac{16800}{100}} = \sqrt{168} = 12.96$

अत: स्तरीय भिन्नता $(\sigma) = 12.96$

स्तरीय भिन्नताको गुणाङ्क $= \dfrac{\sigma}{\overline{X}} = \dfrac{12.96}{31} = 0.418$

अत: स्तरीय भिन्नता $(\sigma) = 12.96$ र यसको गुणाङ्क $= 0.418$ हुन्छ ।

प्रत्यक्ष विधि (Direct Method)

कुनै वास्तविक मध्यक वा अनुमानित मध्यक प्रयोग नगरी तथ्याङ्कमा भएका सङ्ख्याहरू सिधै प्रयोग गरी स्तरीय भिन्नता पत्ता लगाउने तरिकालाई प्रत्यक्ष विधि भनिन्छ । यसका लागि दिइएको सूत्र वा सम्बन्धको प्रयोग गरिन्छ । तथ्याङ्कमा साना सङ्ख्याहरू भएमा यो विधि उपयुक्त हुन्छ ।

$$\text{स्तरीय भिन्नता } (\sigma) = \sqrt{\frac{\Sigma fm^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fm}{N}\right)^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (ii)$$

जहाँ, m = मध्यमान र N = बारम्बारताको योगफल हुन्छ ।

चरणहरू

(क) मध्यमान (m) पत्ता लगाउने ।

(ख) प्रत्येक f र तिनीहरूको सङ्गति m गुणन गरेर fm पत्ता लगाउने ।

(ग) प्रत्येक fm र तिनीहरूको सङ्गति m गुणन गरेर fm^2 पत्ता लगाउने ।

(घ) सबै fm को योगफल Σfm र सबै fm^2 को योगफल Σfm^2 पत्ता लगाउने ।

(ङ) माथि दिइएको सूत्र (i) प्रयोग गरी स्तरीय भिन्नता पत्ता लगाउने ।

उदाहरण 2

दिइएको तथ्याङ्कको प्रत्यक्ष विधिबाट स्तरीय भिन्नता गणना गर्नुहोस् :

प्राप्ताङ्क	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50
विद्यार्थी सङ्ख्या	3	5	7	3	2

समाधान

प्राप्ताङ्क	विद्यार्थी सङ्ख्या (f)	मध्यमान (m)	fm	fm^2
0 - 10	3	5	15	75
10 - 20	5	15	75	1125
20 - 30	7	25	175	4375
30 - 40	3	35	105	3675
40 - 50	2	45	90	4050
	N = 20		$\Sigma fm = 460$	$\Sigma fm^2 = 13300$

$$\text{स्तरीय भिन्नता } (\sigma) = \sqrt{\frac{\Sigma fm^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fm}{N}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{13300}{20} - \left(\frac{460}{20}\right)^2} = \sqrt{665 - 529} = 11.66$$

अत: स्तरीय भिन्नता $(\sigma) = 11.66$

छोटकरी विधि वा अनुमानित मध्यक विधि (Short-cut Method or Assumed Mean Method)

यस विधिमा वर्गान्तरका मध्यमान र अनुमानित मध्यकको भिन्नताबाट स्तरीय भिन्नता गणना गरिन्छ । यसका लागि दिइएको सूत्र वा सम्बन्धको प्रयोग गरिन्छ । वास्तविक मध्यक मान दशमलवमा आउने अवस्थामा यो विधि प्रभावकारी हुन्छ ।

$$\text{स्तरीय भिन्नता } (\sigma) = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fd}{N}\right)^2} \text{ ... ... } (iii)$$

जहाँ, m = मध्यमान र N = बारम्बारताको योगफल, , $d = m - A$ र A = अनुमानित मध्यक हुन्छ ।

छोटकरी विधि वा अनुमानित मध्यक विधिबाट स्तरीय भिन्नता पत्ता लगाउने चरणहरू

(क) मध्यमान (m) पत्ता लगाउने ।

(ख) मध्यमानको बिचको मानलाई काल्पनिक मध्यक A मानेर प्रत्येक मध्यमान र A को भिन्नता $d = m - A$ पत्ता लगाउने ।

(ग) प्रत्येक d र तिनीहरूको सङ्गति f गुणन गरेर पत्ता लगाउने ।

(घ) प्रत्येक fd र तिनीहरूको सङ्गति d गुणन गरेर fd^2 पत्ता लगाउने ।

(ङ) सबै fd को योगफल Σfd र सबै fd^2 को योगफल Σfd^2 पत्ता लगाउने ।

(च) माथि दिइएको सूत्र (iii) प्रयोग गरी स्तरीय भिन्नता पत्ता लगाउने ।

उदाहरण 3

दिइएको तथ्याङ्कबाट छोटकरी विधिअनुसार स्तरीय भिन्नता गणना गर्नुहोस् :

प्राप्ताङ्क	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70
विद्यार्थी सङ्ख्या	10	15	20	8	7

समाधान

प्राप्ताङ्क	विद्यार्थी सङ्ख्या (f)	मध्यमान (m)	$d = (m - A)$ $= (m - 45)$	fd	fd^2
20 - 30	10	25	–20	–200	4000
30 - 40	15	35	–10	–150	1500
40 - 50	20	45 (A)	0	0	0
50 - 60	8	55	10	80	800
60 - 70	7	65	20	140	2800
	N = 60			$\Sigma fd = -130$	$\Sigma fd^2 = 9100$

$$\text{स्तरीय भिन्नता } (\sigma) = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fd}{N}\right)^2} = \sqrt{\frac{9100}{60} - \left(\frac{-130}{60}\right)^2}$$

$$= \sqrt{151.67 - 4.696} = \sqrt{146.974} = 12.12$$

अतः स्तरीय भिन्नता (σ) = 12.12 हुन्छ ।

पद विचलन विधि (Step Deviation Method)

तथ्याङ्कमा प्रयोग भएका सङ्ख्याहरू ठुला र वास्तविक मध्यक गणना गर्न कठिन भएको अवस्थामा यो विधिबाट स्तरीय भिन्नता गणना सहज हुन्छ । यसका लागि दिइएको सूत्र वा सम्बन्धको प्रयोग गरिन्छ ।

स्तरीय भिन्नता $(\sigma) = \sqrt{\frac{\Sigma f d'^2}{N} - \left(\frac{\Sigma f d'}{N}\right)^2} \times h \ldots\ldots\ldots\ldots (iv)$

जहाँ, m = मध्यमान र N = बारम्बारताको योगफल, $d' = \frac{d}{h} = \frac{m-A}{h}$, h = वर्गान्तर र A = अनुमानित मध्यक हुन्छ ।

चरणहरू

(क) मध्यमान (m) पत्ता लगाउने ।

(ख) मध्यमानको बिचको मानलाई अनुमानित मध्यक A मानेर प्रत्येक मध्यमान र A को भिन्नतालाई वर्गान्तर h ले भाग गरी d' पत्ता लगाउने ।।

(ग) प्रत्येक d' र तिनीहरूको सङ्गति f गुणन गरेर fd' पत्ता लगाउने ।

(घ) प्रत्येक fd' र तिनीहरूको सङ्गति d' गुणन गरेर fd'^2 पत्ता लगाउने ।

(ङ) सबै fd' को योगफल $\Sigma fd'$ र सबै fd'^2 को योगफल $\Sigma fd'^2$ पत्ता लगाउने ।

(च) माथि दिइएको समीकरण (iv) को सूत्र प्रयोग गरी स्तरीय भिन्नता पत्ता लगाउने ।

उदाहरण 4

दिइएको तथ्याङ्कको छोटकरी विधिअनुसार स्तरीय भिन्नता गणना गर्नुहोस् :

ज्याला रु. (प्रति घण्टा)	0 - 100	100 - 200	200 - 300	300 - 400	400 - 500
कामदार सङ्ख्या	5	8	7	3	2

समाधान

ज्याला रु. (प्रतिघण्टा)	कामदार सङ्ख्या (f)	मध्यमान (m)	$d' = \frac{m-250}{100}$	fd'	fd'^2
0 - 100	5	50	–2	–10	20
100 - 200	8	150	–1	–8	8
200 - 300	7	250	0	0	0
300 - 400	3	350	1	3	3
400 - 500	2	450	2	4	8
	N = 25			$\Sigma fd' = -11$	$\Sigma fd'^2 = 39$

स्तरीय भिन्नता $(\sigma) = \sqrt{\frac{\Sigma fd'^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fd'}{N}\right)^2} \times h$

$= \sqrt{\frac{39}{25} - \left(\frac{-11}{25}\right)^2} \times 100$

$= \sqrt{1.56 - 0.1936} \times 100$

$= 1.1689 \times 100$

$= 116.89$

अत: स्तरीय भिन्नता $(\sigma) = 116.89$

उदाहरण 5

दुईओटा उद्योगका कर्मचारीहरूको तलबको विश्लेषण तालिकामा दिइएको छ । कुन उद्योगको तलब वितरणमा बढी एकरूपता रहेछ, पत्ता लगाउनुहोस् :

उद्योग	औसत मासिक तलब	तलबको स्तरीय भिन्नता
A	रु. 50000	रु.100
B	रु. 40000	रु. 110

समाधान

यहाँ, उद्योग A को औसत तलब $(\overline{X}_1)$ = रु 50000

उद्योग B को औसत तलब $(\overline{X}_2)$ = रु 40000

उद्योग A को स्तरीय भिन्नता तलब (σ_1) = रु 100

उद्योग B को स्तरीय भिन्नता तलब (σ_2) = रु 110

उद्योग A को विचरणशीलताको गुणाङ्क (C.V.) $= \frac{\sigma_1}{\overline{X}_1} \times 100\ \%$

$= \frac{100}{50000} \times 100\ \% = 0.2\ \%$

उद्योग B को विचरणशीलताको गुणाङ्क (C.V.) $= \frac{\sigma_2}{\overline{X}_2} \times 100\ \%$

$= \frac{110}{40000} \times 100\ \% = 0.275\ \%$

यहाँ, उद्योग B भन्दा उद्योग A को विचरणशीलताको गुणाङ्क कम भएकाले उद्योग B भन्दा उद्योग उद्योग A का कर्मचारीहरूको तलब वितरणमा बढी एकरूपता छ ।

अभ्यास 11.3

1. **दिइएका प्रश्नहरूको उपयुक्त विकल्पमा ठिक चिह्न (✓) लगाउनुहोस् ।**

(क) तलका मध्ये स्तरीय भिन्नता कुन चाहिँ हो ?

a. केन्द्रीय प्रवृत्तिको नाप b. मध्यक c. विचरणशीलताको नाप d. मध्यिका

(ख) स्तरीय भिन्नताको गुणाङ्क पत्ता लगाउने सूत्र कुन हो ?

a. $\frac{\overline{X}}{\sigma}$ b. $\frac{\sigma}{\overline{X}}$ c. $\frac{\sigma}{\overline{X}} \times 100$ d. $\frac{\Sigma f|D|}{N}$

(ग) यदि कुनै तथ्याङ्कको विचरण $(\sigma^2) = 64$ भए स्तरीय भिन्नता कति हुन्छ ?

a. 8 b. 16 c. 32 d. 4096

(घ) दुईओटा तथ्याङ्कमध्ये विचरणशीलताको गुणाङ्क (C.V.) धेरै हुने तथ्याङ्क विचरणशीलताको गुणाङ्क थोरै हुने तथ्याङ्कभन्दा कस्तो हुन्छ ?

a. बढी एकरूपता b. कम एकरूपता

c. बढी विचलन भएको d. कुनै विचलन नभएको

(ङ) यदि $\Sigma f(m - \overline{X})^2 = 6400$ र $N = 100$ भए स्तरीय भिन्नता कति हन्छ ?

a. 10 b. 64 c. 32 d. 8

2. (क) स्तरीय भिन्नता भनेको के हो, लेख्नुहोस् ।

(ख) विचरणशीलताको गुणाङ्क भनेको के हो ?

(ग) मध्यक भिन्नता र स्तरीय भिन्नतामा के फरक छ, लेख्नुहोस् ।

(घ) स्तरीय भिन्नताको गुणाङ्क र विचरणशीलताको गुणाङ्कमा के फरक छ, लेख्नुहोस् ।

3. (क) यदि $N = 100$, $\Sigma fm = 400$ र $\Sigma fm^2 = 4000$ भए मध्यक र स्तरीय भिन्नता पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) यदि $N = 40$, $\Sigma fd = -400$ र $\Sigma fd^2 = 5000$, जहाँ $d = m - A$ र A अनुमान गरिएको मध्यक हो भने स्तरीय भिन्नता पत्ता लगाउनुहोस् ।

4. **दिइएको तथ्याङ्कको स्तरीय भिन्नता र यसको गुणाङ्क गणना गर्नुहोस् :**

(क)

तौल (kg)	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60
विद्यार्थी सङ्ख्या	5	10	12	7	6

(ख)

प्राप्ताङ्क	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70
विद्यार्थी सङ्ख्या	8	12	15	20	12	8

(ग)

तौल (कि.ग्रा.)	3 - 5	5 - 7	7 - 9	9 - 11	11 - 13
कुकुरको सङ्ख्या	1	3	5	4	2

5. एउटा विद्यालयमा 50 पूर्णाङ्कको गणित विषयको परीक्षामा 40 जना विद्यार्थीले प्राप्त गरेको प्राप्ताङ्क दिइएको छ :

प्राप्ताङ्क	10 भन्दा कम	20 भन्दा कम	30 भन्दा कम	40 भन्दा कम	50 भन्दा कम
विद्यार्थी सङ्ख्या	5	11	25	35	40

(क) मध्यक प्राप्ताङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) स्तरीय भिन्नता र यसको गुणाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

6. एउटा कारखानामा काम गर्ने कामदारहरूको दैनिक ज्याला रु. 600 देखि रु. 1200 भन्दा बढी रहेछ । यसलाई तालिकामा दिइएको छ :

दैनिक ज्याला	कामदार सङ्ख्या
600 भन्दा बढी	100
700 भन्दा बढी	80
800 भन्दा बढी	55
900 भन्दा बढी	25
1000 भन्दा बढी	15
1100 भन्दा बढी	8
1200 भन्दा बढी	4

(क) औसत ज्याला पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) स्तरीय भिन्नता र यसको गुणाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) विचरणशीलता पत्ता लगाउनुहोस् ।

(घ) विचरणशीलताको गुणाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

7. दुईओटा जुत्ता कारखानाका कामदारहरूको मासिक तलबको विश्लेषण गरी तालिकामा दिइएको छ :

	कारखाना A	कारखाना B
कामदार सङ्ख्या	40	50
औसत मासिक तलब	रु.35000	रु.45000
स्तरीय भिन्नता	रु.40	रु.35

(क) कुन कारखानाले तलबमा धेरै खर्च गर्दो रहेछ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) कुन कारखानाको तलब वितरणमा बढी एकरूपता रहेछ, कारणसहित लेख्नुहोस् ।

8. एउटा विद्यालयमा अध्ययनरत कक्षा 10 का 36 जना विद्यार्थीले गणित विषयको परीक्षामा प्राप्त गरेको प्राप्ताङ्क दिइएको छ :

35	62	72	50	70	74	34	60	36
21	14	75	48	28	38	64	21	45
57	40	19	34	30	47	20	75	51
45	56	22	29	22	13	53	66	62

(क) माथिको तथ्याङ्कलाई पहिलो वर्गान्तर 10 - 20 भएको बारम्बारता तालिकामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

(ख) औसत प्राप्ताङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) स्तरीय भिन्नता र यसको गुणाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

(घ) विचरणशीलता र विचरणशीलताको गुणाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

उत्तर

1. (क) c (ख) b (ग) b (घ) b (ङ) d

2. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् । 3.(क) 4, 4.899 (ख) 3. (ख) 11.53, 0.21 (ग) 1.5, 0.1875

4. (क) 12.35, 0.355 (ख) 14.74, 0.365 (ग) 2.22, 0.264

5 (क) 26 (ख) 11.79, 0.453 6.(क) 837 (ख) 155.34, 0.186 (ग) 24130.5156 (घ) 18.6%

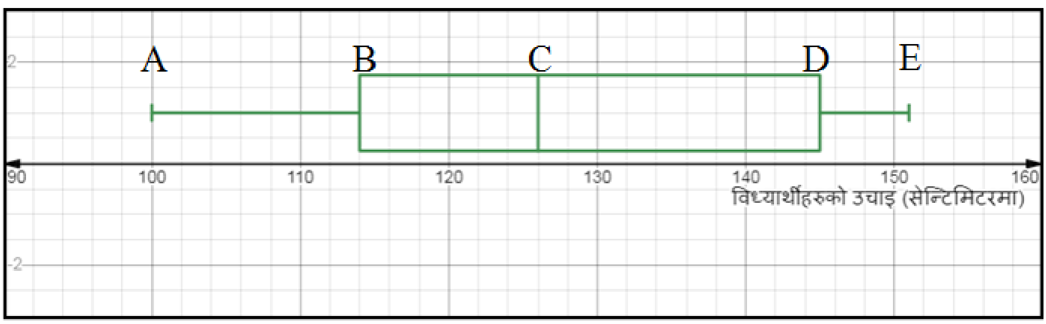
7. (क) B (ख) B 8. (क) शिक्षकलाई देखाउनुहोस् । (ख) 45.28 (ग) 19.07, 0.42 (घ) 363.67, 42.1%

11.6 ह्विस्कर बक्स प्लट (Whisker Box Plot)

तथ्याङ्कशास्त्रमा ह्विस्कर बक्स प्लट डेटाको वास्तविक बनोट बुझ्न र दुई समूहबिच सार्थक तुलना गर्न प्रयोग गरिने एक भरपर्दो विधि हो । केवल औसत (mean) मानले कहिलेकाहीँ डेटाभित्रको वास्तविक भिन्नतालाई लुकाउन सक्छ तर बक्स प्लटले हामीलाई डेटाको वितरण (distribution) र फैलावट (spread) को स्पष्ट चित्र प्रदान गर्छ ।

क्रियाकलाप 1

हामीले कक्षा 9 मा whisker box plot का बारेमा अध्ययन गरिसकेका छौं । सोही आधारमा दिइएको ग्राफ हेर्नुहोस् र निम्नलिखित प्रश्नहरूमा छलफल गरी निष्कर्ष निकाल्नुहोस् :



(क) माथिको लेखाचित्र केको लेखाचित्र हो, लेख्नुहोस् ।

(ख) माथिको लेखाचित्रमा विन्दुहरू A, B, C, D र E ले के के जनाउँछन्, लेख्नुहोस् ।

(ग) विन्दुहरू A देखि B तथा D देखि E सम्मको भागलाई के भनिन्छ ?

(घ) विन्दुहरू B देखि D सम्मको भागलाई के भनिन्छ ?

(ङ) चित्रमा विन्दुहरू A, B, C, D र E का मानहरू कति कति छन् ?

माथिको चित्र ह्विस्कर बक्स प्लट (Whisker Box Plot) को चित्र हो । कुनै पनि तथ्याङ्कका बिचको 50% भागलाई बक्समा र बाँकी रहेको 50% भागलाई दुबै छेउतिरका रेखामा पर्ने गरी तयार पारिएको चित्रात्मक प्रस्तुतिलाई ह्विस्कर बक्स प्लट भनिन्छ । यस ह्विस्कर बक्स प्लटका पाँचओटा विन्दुहरूले सो तथ्याङ्कको पाँचओटा मानहरूलाई जनाउँछ । चित्रमा विन्दु A ले सबैभन्दा सानो मान (lowest value), विन्दु B ले पहिलो चतुर्थांश (Q_1), विन्दु C ले मध्यिका (Q_2), विन्दु D ले तेस्रो चतुर्थांश (Q_3) र विन्दु E ले सबैभन्दा ठुलो मान (highest value) जनाउँछन् । दिइएको ह्विस्कर बक्स प्लटमा विन्दुहरू A देखि B सम्म तथा विन्दुहरू D देखि E सम्मको भागलाई बक्स भनिन्छ । माथिको ह्विस्कर बक्स प्लटमा विद्यार्थीको उचाइ (से.मी.) दिइएको छ । तसर्थ, दिइएको तथ्याङ्कमा विद्यार्थीको उचाइको न्यूनतम मान 100 से.मी., पहिलो चतुर्थांश 114 से.मी., मध्यिका 126 से.मी., तेस्रो चतुर्थांश 145 से.मी. र अधिकतम मान 151 से.मी. छन् ।

कुनै पनि तथ्याङ्कका बिचको 50% भागलाई बक्समा र बाँकी रहेको 50% भागलाई दुबै छेउतिरका रेखामा पर्ने गरी तयार पारिएको चित्रात्मक प्रस्तुतिलाई ह्विस्कर बक्स प्लट (Whisker Box Plot)

भनिन्छ । ह्विस्कर बक्स प्लटका पाँचओटा विन्दुहरूले दिएको तथ्याङ्कको पाँचओटा मानहरू क्रमशः सबैभन्दा सानो मान, पहिलो चतुर्थांश, मध्यिका, तेस्रो चतुर्थांश र सबैभन्दा ठुलो मान जनाउँछन् ।

ह्विस्कर बक्स प्लट तयार पार्दा अपनाउने चरणहरू

चरण 1 : दिइएको तथ्याङ्कलाई बढ्दो क्रममा राख्ने ।

चरण 2 : दिइएको तथ्याङ्कको सबैभन्दा सानो मान, मध्यिका, चतुर्थांशहरू र सबैभन्दा ठुलो मान पत्ता लगाउने ।

चरण 3 : लेखाचित्रमा स्केल बनाई पाँचओटा मुख्य मानहरू : सबैभन्दा सानो मान, पहिलो चतुर्थांश, मध्यिका, तेस्रो चतुर्थांश र सबैभन्दा ठुलो मान सो लेखाचित्रमा अङ्कित गर्ने ।

चरण 4 : पहिलो चतुर्थांश र तेस्रो चतुर्थांशबिचको भागमा बक्स तयार गर्ने र सबैभन्दा सानो मानलाई पहिलो चतुर्थांशसँग तथा सबैभन्दा ठुलो मानलाई तेस्रो चतुर्थांशसँग रेखाहरू खिच्ने ।

उदाहरण 1

एघार जना विद्यार्थीको उमेरलाई (वर्ष) तलको तालिकामा दिइएको छ। उक्त तथ्याङ्कको सबैभन्दा सानो मान, पहिलो चतुर्थांश, मध्यिका, तेस्रो चतुर्थांश र सबैभन्दा ठुलो मान निकालेर ह्विस्कर बक्स प्लटमा देखाउनुहोस् ।

13 17 16 14 11 13 10 16 11 18 12

समाधान

दिइएको तथ्याङ्कलाई बढ्दो क्रममा राख्दा

10 11 11 12 13 13 14 16 16 17 18

यहाँ, सबैभन्दा सानो मान = 10

अब, पहिलो चतुर्थांश (Q_1) = $\left(\frac{N+1}{4}\right)$ औँ पद = $\left(\frac{11+1}{4}\right)$ औँ पद = $\left(\frac{12}{4}\right)$ औँ पद = 3 औँ पद

अतः $Q_1 = 11$

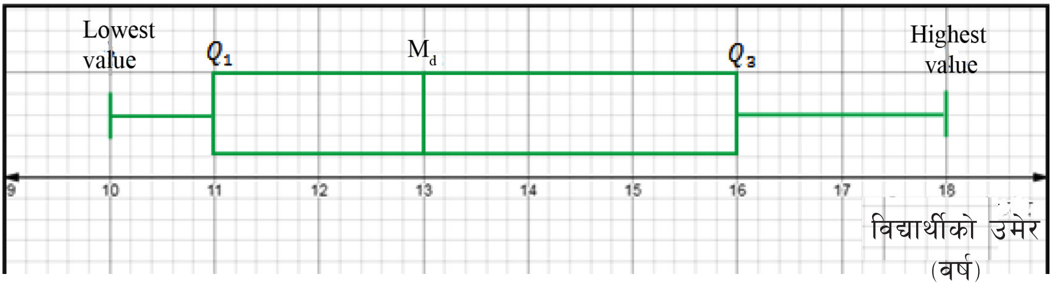
मध्यिका (M_d) = = $\left(\frac{2(N+1)}{4}\right)$ औँ पद = $\left(\frac{2\times12}{4}\right)$ औँ पद = 6 औँ पद

अतः $M_d = 13$

तेस्रो चतुर्थांश (Q_3) = $\left(\frac{3(N+1)}{4}\right)$ औँ पद = $\left(\frac{3\times12}{4}\right)$ औँ पद = 9 औँ पद

अतः Q_3 = 16 र सबैभन्दा ठुलो मान = 18

अब, माथि निकालिएका सबैभन्दा सानो मान, Q_1, M_d, Q_3 र सबैभन्दा ठुलो मानका आधारमा दिएको तथ्याङ्कलाई ह्विस्कर बक्स प्लटमा देखाउँदा



11.2.2 ह्विस्कर बक्स प्लट प्रयोग गरी दुईओटा तथ्याङ्कबिचको तुलना (Comparision of Two Data using Whisker Box Plot)

क्रियाकलाप 2

दुई जना क्रिकेट खेलाडीले पछिल्ला एघारओटा क्रिकेट खेलमा ल्याएको स्कोर (रन) लाई तलका तालिकामा देखाइएको छ :

खेलाडी A	21	25	71	5	42	15	85	64	110	32	35
खेलाडी B	12	55	101	34	60	41	72	6	22	7	18

(क) उक्त दुईओटा तथ्याङ्कको सबैभन्दा सानो मान, पहिलो चतुर्थांश, मध्यिका, तेस्रो चतुर्थांश र सबैभन्दा ठुलो मान निकाल्नुहोस् ।

(ख) दुईओटा तथ्याङ्कको छुट्टाछुट्टै ह्विस्कर बक्स प्लटलाई लेखाचित्रमा देखाउनुहोस् ।

(ग) ह्विस्कर बक्स प्लटका आधारमा खेलाडी A र खेलाडी B ले प्राप्त गरेको स्कोरलाई मध्यिका (median) र अन्तर चतुर्थांशीय विस्तार (interquartile range) का आधारमा तुलना गर्नुहोस् ।

खेलाडी A का लागि :

खेलाडी A को स्कोरलाई क्रममा राख्दा : 5, 15, 21, 25, 32, 35, 42, 64, 71, 85, 110

यहाँ, सबैभन्दा सानो मान = 5

अब, पहिलो चतुर्थांश $(Q_1) = \left(\frac{N+1}{4}\right)$ औँ पद $= \left(\frac{11+1}{4}\right)$ औँ पद $= \left(\frac{12}{4}\right)$ औँ पद = 3 औँ पद

अत: $Q_1 = 21$

मध्यिका $(M_d) = \left(\frac{2(N+1)}{4}\right)$ औँ पद $= \left(\frac{2\times12}{4}\right)$ औँ पद = 6 औँ पद

अत: $M_d = 35$

तेस्रो चतुर्थांश $(Q_3) = \left(\frac{3(N+1)}{4}\right)$ औँ पद $= \left(\frac{3\times12}{4}\right)$ औँ पद = 9 औँ पद

अत: $Q_3 = 71$ र सबैभन्दा ठुलो मान = 110

खेलाडी B का लागि :

खेलाडी B को स्कोरलाई क्रममा राख्दा : 6, 7, 12, 18, 22, 34, 41, 55, 60, 72, 101

यहाँ, सबैभन्दा सानो मान = 6

अब, पहिलो चतुर्थांश (Q_1) = $\left(\frac{N+1}{4}\right)$ औँ पद = $\left(\frac{11+1}{4}\right)$ औँ पद = $\left(\frac{12}{4}\right)$ औँ पद = 3 औँ पद

अत: $Q_1 = 12$

मध्यिका (M_d) = $\left(\frac{2(N+1)}{4}\right)$ औँ पद = $\left(\frac{2\times12}{4}\right)$ औँ पद = 6 औँ पद

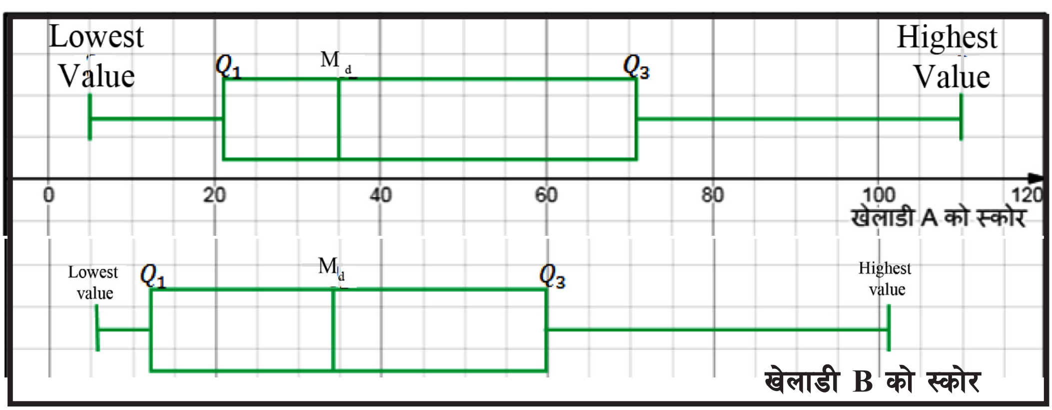
अत: $M_d = 34$

तेस्रो चतुर्थांश (Q_3) = $\left(\frac{3(N+1)}{4}\right)$ औँ पद = $\left(\frac{3\times12}{4}\right)$ औँ पद = 9 औँ पद

अत: $Q_3 = 60$ र

सबैभन्दा ठुलो मान = 101

अब, माथि निकालिएका खेलाडी A र B को स्कोरको सबैभन्दा सानो मान, Q_1, M_d, Q_3 र सबैभन्दा ठुलो मानका आधारमा दिएको तथ्याङ्कलाई ह्विस्कर बक्स प्लटमा देखाउँदा



माथिका दुई ह्विस्कर बक्स प्लटबाट खेलाडी A ले प्राप्त गरेको स्कोरलाई खेलाडी B ले प्राप्त गरेको स्कोरसँग मध्यिका र अन्तर चतुर्थांशीय विस्तारका आधारमा यसरी तुलना गर्न सकिन्छ ।

(क) मध्यिकाको आधारमा

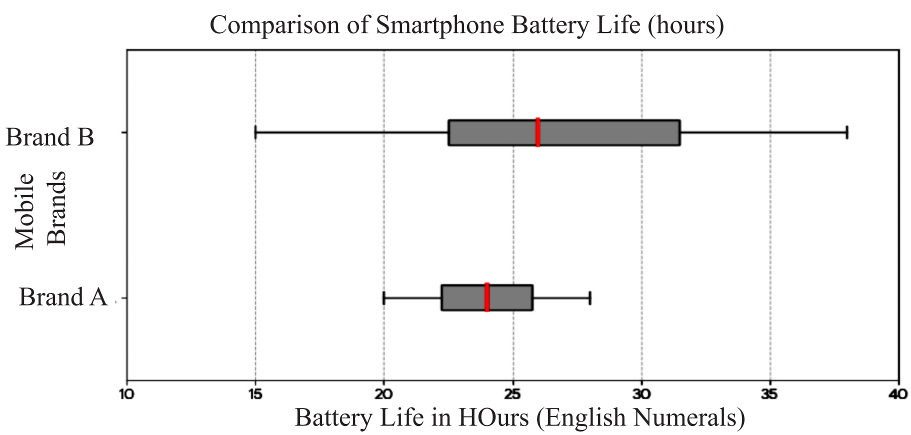
यहाँ, खेलाडी A ले प्राप्त गरेको स्कोरको मध्यिका 35 र खेलाडी B ले प्राप्त गरेको स्कोरको मध्यिका 34 छ । यसर्थ, खेलाडी B ले प्राप्त गरेको औसत स्कोरभन्दा खेलाडी A ले प्राप्त गरेको औसत स्कोर बढी छ ।

(ख) अन्तरचतुर्थांशीय विस्तारका आधारमा

खेलाडी A ले प्राप्त गरेको स्कोरको अन्तरचतुर्थांशीय विस्तार (IQR) = $Q_3 - Q_1 = 71 - 21 = 50$, र खेलाडी B ले प्राप्त गरेको स्कोरको अन्तर चतुर्थांशीय विस्तार (IQR) = $Q_3 - Q_1 = 60 - 12 = 48$ छ । खेलाडी B ले प्राप्त गरेको स्कोरको अन्तरचतुर्थांशीय विस्तारभन्दा खेलाडी A ले प्राप्त गरेको स्कोरको अन्तर चतुर्थांशीय विस्तार बढी भएकाले खेलाडी B को स्कोरभन्दा खेलाडी A को स्कोरको भिन्नता (Variation) बढी छ, अर्थात् खेलाडी B को स्कोरभन्दा खेलाडी A को स्कोरको एकरूपता (Consistency) कम छ ।

अभ्यास 11.2

1. दुईओटा मोबाइल ब्रान्ड (ब्रान्ड A र ब्रान्ड B) का ब्याट्रीहरू कति घण्टा टिक्छन् भनेर परीक्षण गरिएको छ । दुबैको बक्स प्लट दिइएको छ :



(क) सामान्यतः कुन ब्रान्डको ब्याट्री धेरै समय टिक्ने देखिन्छ (median का आधारमा) ?

a. ब्रान्ड A   b. ब्रान्ड B   c. दुबै बराबर छन्   d. कुनै पनि होइन

(ख) कुन ब्रान्डको ब्याट्रीको टिकाउपनमा “एकरूपता” (consistency) बढी छ ?

a. ब्रान्ड B, किनकि यसको रेन्ज (range) ठुलो छ ।

b. ब्रान्ड A, किनकि यसको बाकस सानो (interquartile range- IQR) छ र सबै मानहरू नजिक छन् ।

c. दुबै ब्रान्ड उत्तिकै भरपर्दा छन् ।

d. ब्रान्ड B, किनकि यसले ३८ घण्टासम्म ब्याट्री ब्याकअप दिन्छ ।

(ग) कुन ब्रान्डको ब्याट्रीको सबैभन्दा कम टिकाउपन बढी सुनिश्चित छ ?

a. ब्रान्ड B (१५ घण्टा) b. ब्रान्ड A (२० घण्टा)

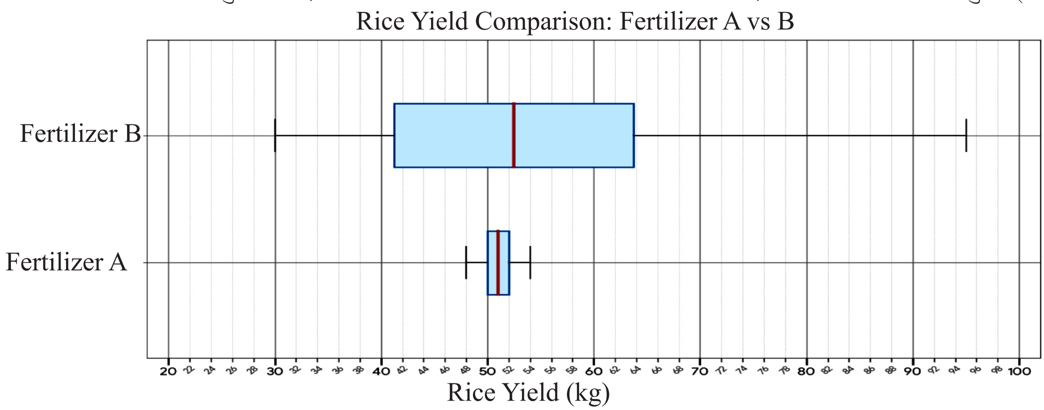
c. दुबैको सबैभन्दा कम समय एउटै छ । d. भन्न सकिँदैन ।

(घ) बक्स प्लटको रातो रेखाले के जनाउँछ ?

a. ब्याट्रीको सबैभन्दा बढी टिकाउपन b. ब्याट्रीको सबैभन्दा कम टिकाउपन

c. ब्याट्रीको बिचको टिकाउपन (५०% मानहरू जहाँ पर्छन्) d. ब्याट्रीको मूल्य

2. दुई फरक मल (fertilizer A र B) प्रयोग गर्दा दश वर्षमा भएको धानको उत्पादन (kg मा) लाई बक्स प्लटमा प्रस्तुत गरिएको छ । उक्त बक्स प्लटका आधारमा सोधिएका प्रश्नको उत्तर दिनुहोस् ।

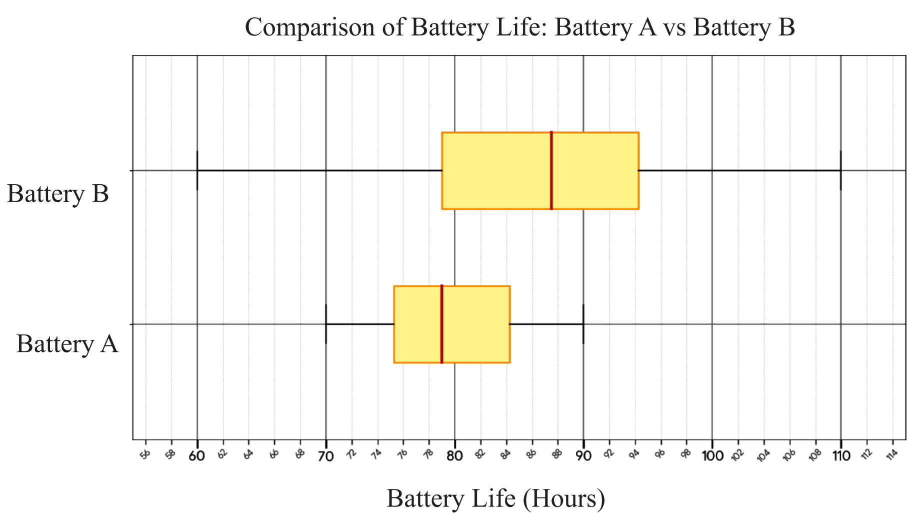


(क) कुन मल प्रयोग गर्दा धानको सबैभन्दा काम उत्पादन बढी सुनिश्चित देखिन्छ ?

(ख) यदि तपाईँ एक किसान हुनुहुन्छ र तपाईँलाई "जोखिम" कम लिनु छ भने कुन मल रोज्नुहुन्छ, किन ? (Hint: IQR हेर्नुहोस् ।)

(ग) के कुनै यस्तो वर्ष छ जहाँ मल 'B' ले असाधारण रूपमा धेरै उत्पादन दियो ? यो प्लटमा कसरी देखिन्छ ?

3. दिइएको दुईओटा बक्स प्लटले दुईओटा ब्याट्रीको टिकाउपन (battery life) देखाउँछन् । बक्स प्लटका आधारमा सोधिएका प्रश्नको उत्तर दिनुहोस् ।



(क) ब्याट्री A को median टिकाउपना कति छ ?

(ख) ब्याट्री B को median टिकाउपना कति छ ?

(ग) ब्याट्री A र ब्याट्री B दुबैको टिकाउपनाको range पत्ता लगाउनुहोस् ।

(घ) तपाईं कुन ब्याट्री किन्नुहुन्छ ? आफ्नो निर्णयलाई कारणसहित पुष्टि गर्नुहोस् ।

4. दुईओटा मोबाइल पसलले एक हप्तामा बिक्री गरेका मोबाइलहरूको आँकडालाई तलका तालिकामा देखाइएको छ :

पसल क :	8	5	14	9	11	7	18
पसल ख :	10	12	8	16	6	3	2

(क) उक्त दुईओटा तथ्याङ्कको सबैभन्दा सानो मान, पहिलो चतुर्थांश, मध्यिका, तेस्रो चतुर्थांश र सबैभन्दा ठुलो मान निकाल्नुहोस् ।

(ख) दुईओटा तथ्याङ्कको छुट्टाछुट्टै ह्विस्कर बक्स प्लटलाई लेखाचित्रमा देखाउनुहोस् ।

(ग) ह्विस्कर बक्स प्लटका आधारमा पसल क र पसल ख ले बिक्री गरेको मोबाइल सङ्ख्यालाई मध्यिका र अन्तर चतुर्थांशीय विस्तारका आधारमा तुलना गर्नुहोस् ।

उत्तर

1. (क) b (ख) b (ग) b (घ) c 2. प्रश्न न. 2 देखि 4 सम्म शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

मिश्रित अभ्यास - विषयक्षेत्रगत

1. कुनै परीक्षामा विद्यार्थीले प्राप्त गरेको प्राप्ताङ्क यस प्रकार छ :

प्राप्ताङ्क	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90
विद्यार्थी सङ्ख्या	4	6	10	17	11	9	3

(क) चतुर्थांशीय विचलन, पहिलो चतुर्थांश र तेस्रो चतुर्थांश भए तिनीहरूको सम्बन्ध लेख्नुहोस् ।

(ख) माथिको तथ्याङ्कका आधारमा स्तरीय भिन्नता पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) विचरणशीलताको गुणाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

2. एउटा कक्षाका 40 जना विद्यार्थीहरूले गणित विषयको द्वितीय त्रैमासिक परीक्षामा प्राप्त गरेका प्राप्ताङ्क तालिकामा दिइएको छ :

प्राप्ताङ्क	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70	70 - 80
विद्यार्थी सङ्ख्या	5	9	12	7	4	3

(क) मध्यकबाट मध्यक भिन्नता पत्ता लगाउने सूत्र लेख्नुहोस् ।

(ख) स्तरीय भिन्नता पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) यदि प्रथम त्रैमासिक परीक्षाको प्राप्ताङ्कको स्तरीय भिन्नता 8.75 थियो भने प्रथम र द्वितीय त्रैमासिक परीक्षाका प्राप्ताङ्कको तुलना गर्नुहोस् ।

3. एउटा बैङ्कमा काम गर्ने 50 जना कर्मचारीहरूको मासिक तलब तालिकामा दिइएको छ :

तलब (रु. हजारमा)	20000 भन्दा बढी	30000 भन्दा बढी	40000 भन्दा बढी	50000 भन्दा बढी	60000 भन्दा बढी	70000 भन्दा बढी
कर्मचारी सङ्ख्या	50	45	25	9	4	2

(क) चतुर्थांशीय बिचलन भनेको के हो, लेख्नुहोस् ।

(ख) दिएको तथ्याङ्कका लागि उपयुक्त विचरणशीलताको नाप कुन हो, कारणसहित पुष्टि गर्नुहोस् ।

(ग तथ्याङ्कबाट चतुर्थांशीय बिचलन र यसको गुणाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

4. एउटा कक्षाका 40 जना विद्यार्थीहरूको कुनै परीक्षामा गणित विषयको प्राप्ताङ्क यस प्रकार दिइएको छ :

75	35	45	47	60	61	56	39	56	52
42	60	69	42	43	46	55	56	35	51
58	61	49	57	51	59	47	52	57	55
48	58	54	67	46	56	39	48	51	60

(क) विचरणशीलताको गुणाङ्क गणना गर्ने सूत्र लेख्नुहोस् ।

(ख) माथिको तथ्याङ्कलाई 5 वर्गान्तर भएको बारम्बारता तालिकामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

(ग) विचरणशीलताको गुणाङ्क गणना गर्नुहोस् ।

(घ) एउटा परीक्षामा दुई जना विद्यार्थी A र B को नतिजा विश्लेषण गर्दा विचरणशीलताको गुणाङ्क क्रमशः 21 % र 12 % पाइयो भने कसको नतिजामा बढी एकरूपता रहेछ, कारणसहित लेख्नुहोस् ।

5. एउटा विद्यालयका 60 जना विद्यार्थी गणित तथा विज्ञान विषयमा प्राप्त गरेको अङ्कलाई तलका दुईओटा तालिकामा देखाइएको छ :

(क)

गणित विषयको प्राप्ताङ्क	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70	70 - 80	80 - 90	90 - 100
विद्यार्थी सङ्ख्या	5	11	16	12	10	4	2

(ख)

विज्ञान विषयको प्राप्ताङ्क	30 – 40	40 – 50	50 – 60	60 – 70	70 – 80	80 – 90	90 – 100
विद्यार्थी सङ्ख्या	4	8	16	20	6	4	2

(क) माथिका दुईओटा विषयको प्राप्ताङ्कको सबैभन्दा सानो मान, पहिलो चतुर्थांश, मध्यिका, तेस्रो चतुर्थांश र सबैभन्दा ठुलो मान निकाल्नुहोस् ।

(ख) उक्त दुईओटा तथ्याङ्कको चतुर्थांशीय भिन्नता र यसको गुणाङ्क निकाल्नुहोस् ।

(ग) दुईओटा विषयको प्राप्ताङ्कमध्ये कुन चाहिँ प्राप्ताङ्कमा एकरूपता छ, कारणसहित लेख्नुहोस् ।

(घ) दुईओटा तथ्याङ्कको छुट्टाछुट्टै ह्विस्कर बक्स प्लट बनाई लेखाचित्रमा देखाउनुहोस् ।

उत्तर

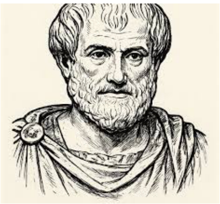
1. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।
2. (क) शिक्षकलाई देखाउनुहोस् । (ख) 14 (ग) द्वितीय त्रैमासिक परीक्षाभन्दा प्रथम त्रैमासिक परीक्षाको प्राप्ताङ्कमा कम विचलन
3. (क) शिक्षकलाई देखाउनुहोस् । (ख) open ended class भएकाले चतुर्थांशीय बिचलन उपयुक्त हुन्छ । (ग) 7.03, 0.172
4. (क) र (ख) शिक्षकलाई देखाउनुहोस् । (ग) 16.86% (घ) B को नतिजामा बढी एकरूपता
5. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

पाठ 12

निरन्तरता (Continuity)

12.1 परिचय (Introduction)

कुनै पनि रेखा निश्चित वर्गान्तरमा कतै पनि नटुटी बहिरहेको छ भने उक्त रेखालाई निरन्तर (continuous) रेखा भनिन्छ। प्राचीन ग्रिक गणितज्ञ Aristotle ले निरन्तरताको अवधारणाका बारेमा सुरुआत गरेका थिए। सत्रौँ शताब्दीमा Newton ले गति निरन्तर हुन्छ भन्ने तथ्य प्रमाणित गरे भने अठारौँ शताब्दीमा Leonhard Euler ले गणितीय सम्बन्धहरूलाई कसरी निरन्तर लेख्न सकिन्छ भनी मार्गनिर्देश गरेका थिए । त्यसपछि उन्नाइसौँ शताब्दीमा Cauchy र Karl Weiertrass ले निरन्तरतालाई थप विकास गरी आधुनिक गणितसँग जोडेर यसको आधारस्तम्भका रूपमा स्थापित गरेका थिए । हाम्रो दैनिक व्यवहारलगायत गणित, विज्ञान तथा प्रविधि, इन्जिनियरिङ, व्यापार, अर्थशास्त्र, सूचना तथा सञ्चार आदि क्षेत्रमा निरन्तरताको प्रयोग गरिन्छ ।


Aristotle

12.2 निरन्तरता र विच्छिन्नता (Continuity and Discontinuity)

क्रियाकलाप 1

तलका चित्रहरू अवलोकन गरी दिइएका प्रश्नहरूमा छलफल गर्नुहोस् :

(क) सर्प र भ्यागुताको हिँडाइमा के भिन्नता पाउनुहुन्छ ?

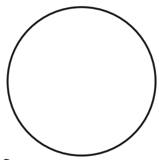
(ख) सर्प र भ्यागुताको हिँडाइमा यिनीहरूको जमिनसँग कस्तो सम्बन्ध पाउनुहुन्छ ?

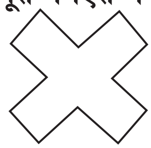
(ग) कुन जीवको हिँडाइ निरन्तर वा अविच्छिन्न छ, कारण दिनुहोस् ।

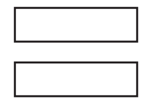
सर्पले आफू हिँडेको बाटामा पर्ने जमिनका सबै विन्दुहरूलाई छुँदै अगाडि बढ्छ भने भ्यागुता उफ्रँदै अगाडि बढ्ने हुँदा यसले आफू हिँड्ने बाटामा पर्ने जमिनका सबै विन्दुहरूलाई छुँदैन । त्यसैले सर्पले हिँड्दा बनाउने बाटाले निरन्तरता जनाउँछ भने भ्यागुता हिँड्दा बनाउने बाटाले विच्छिन्नता जनाउँछ ।

क्रियाकलाप 2

दिइएका चित्रहरू बनाउन सुरु गरेदेखि चित्र पूरा नभएसम्म कलम नउठाई बनाउने प्रयास गर्नुहोस् :


चित्र (क)


चित्र (ख)


चित्र (ग)

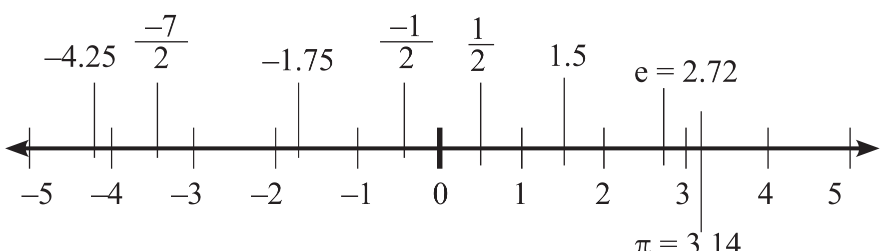
कलम नउठाई तपाईंले कुन कुन चित्र बनाउन सक्नुभयो ?

यदि कलम उठाउनुपर्ने वा नपर्ने कामलाई गणितज्ञहरूले विभिन्न शब्दहरू दिइएका छन् । चित्र (क) र (ख) कोर्दा सुरुदेखि अन्त्यसम्म कलमको टुप्पोले कागज छोड्नुपर्दैन भने चित्र (ग) कोर्दा कलमको टुप्पोले कागज छोड्नुपर्छ । त्यसैले चित्र (क) र (ख) ले अविच्छिन्न, लगातार वा निरन्तर (continuous) जनाउँछन् भने चित्र (ग) कोर्दा कुनै विन्दुमा पुगेपछि कलम उठाएर अर्को ठाउँमा लैजानुपर्ने भएकाले उक्त चित्र विच्छिन्न (discontinuous) हुन्छ ।

चित्र कोर्दा सुरुदेखि अन्त्यसम्म कलमको टुप्पाले कागज छोड्नुपर्दैन भने त्यो चित्र अविच्छिन्न हुन्छ । चित्र कोर्दा कुनै विन्दुमा पुगेपछि कलम उठाएर अर्को ठाउँमा लैजानुपर्‍यो भने त्यो चित्र विच्छिन्न हुन्छ ।

क्रियाकलाप 3

तलको सङ्ख्या रेखा अवलोकन गर्नुहोस् र सोधिएका प्रश्नहरूमा छलफल गर्नुहोस् :



(क) के 1 र 2 का बिचमा कुनै प्राकृतिक सङ्ख्या छ ? के प्राकृतिक सङ्ख्याले निरन्तर रेखा बनाउँछन् ?

(ख) के 3 र 4 का बिचमा कुनै पूर्ण सङ्ख्या छ ? के पूर्ण सङ्ख्याले निरन्तर रेखा बनाउँछन् ?

(ग) के – 1 र 0 का बिचमा कुनै पूर्णाङ्क छ ? के पूर्णाङ्क सङ्ख्याले निरन्तर रेखा बनाउँछन् ?

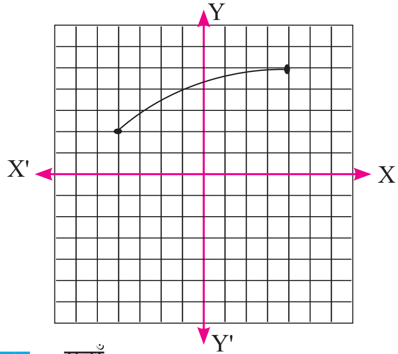
यहाँ 1 बाट 2 मा जाँदा वा 3 बाट 4 मा जाँदा वा –1 बाट 0 मा जाँदा बिचमा “खाली ठाउँ” छ । त्यसैले प्राकृतिक सङ्ख्याहरू, पूर्ण सङ्ख्याहरू र पूर्णाङ्कका समूहहरूले निरन्तर रेखा बनाउँदैनन् । जब हामी वास्तविक सङ्ख्याहरूलाई सङ्ख्या रेखामा राख्छौँ, तब कुनै पनि ठाउँ खाली रहँदैन । रेखाको हरेक विन्दुले कुनै एउटा वास्तविक सङ्ख्या जनाउँछ । यहाँ कुनै खाडल, प्वाल वा फड्को हुँदैन । त्यसैले वास्तविक सङ्ख्याको रेखा निरन्तर हुन्छ ।

प्राकृतिक सङ्ख्याहरू, पूर्ण सङ्ख्याहरू र पूर्णाङ्कका समूहहरूले निरन्तर रेखा बनाउँदैनन् भने वास्तविक सङ्ख्याहरूले सङ्ख्या रेखामा निरन्तरता देखाउँछन् ।

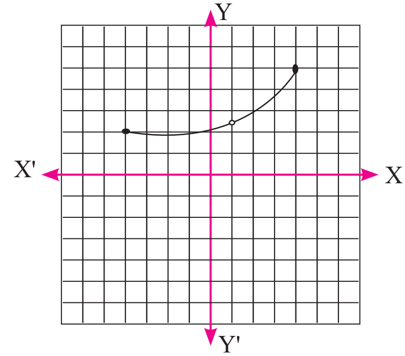
उदाहरण 1

दिइएका वक्र कुन विन्दुदेखि कुन विन्दुसम्म निरन्तर र कुन विन्दुमा विच्छिन्न छन्, लेख्नुहोस् ।

(क)



(ख)



समाधान : यहाँ,

(क) दिइएको वक्र $x = -4$ बाट 4 सम्म कुनै पनि विन्दुमा नटुटी निरन्तर रूपमा अगि बढेको छ । त्यसैले यो वक्र $-4 \leq x \leq 4$ मा निरन्तर छ ।

(ख) दिइएको वक्र $x = -4$ बाट 4 सम्ममा एउटा विन्दु $x = 1$ मा टुटेको छ तर अन्य विन्दुमा निरन्तर छ । त्यसैले यो वक्र $x = 1$ विन्दुमा विच्छिन्न छ तर $-4 \leq x < 1$ र $1 < x \leq 4$ मा निरन्तर छ ।

अभ्यास 12.1

1. दिइएका प्रश्नहरूको उपयुक्त विकल्पमा ठिक चिह्न (✓) लगाउनुहोस् :

(क) यदि कुनै वक्र कलम नउठाई खिच्न सकिन्छ भने उक्त वक्रलाई के भनिन्छ ?

a. विच्छिन्न वक्र   b. निरन्तर वक्र

c. टुटेको वक्र   d. काटिएको वक्र

(ख) दैनिक जीवनमा निरन्तरताको उदाहरण कुन हुन सक्छ ?

a. बोटबिरुवाको उचाइ बढ्नु   b. क्रिकेटको स्कोर बढ्नु

c. कक्षामा विद्यार्थीको सङ्ख्या   d. गोजीमा भएको सिक्काको सङ्ख्या

(ग) -2 देखि $+2$ सम्मका वास्तविक सङ्ख्याहरूले सङ्ख्या रेखाको कुन कुन भाग ओगट्छन् ?

a. -2 र $+2$ बिचका केही विन्दुहरू   b. -2 देखि $+2$ सम्मका सबै विन्दुहरू

c. -2, 0 र $+2$ विन्दुहरू मात्र   d. $-2, -1, 0, +1, +2$ सम्मका सबै विन्दुहरू

(घ) कुनै फलन $x = a$ मा निरन्तर हुन तलका मध्ये कुन सर्त आवश्यक हुन्छ ?

a. ग्राफ $x = a$ मा काटिएको हुनुपर्छ । b. ग्राफ $x = a$ मा टुटेको हुनुपर्छ ।

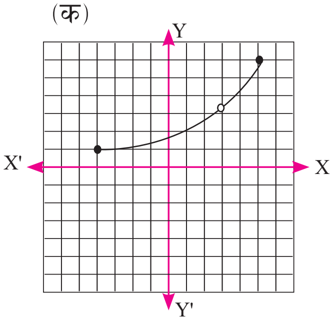
c. ग्राफ $x = a$ मा नटुटेको हुनुपर्छ । d. ग्राफमा $x = a$ मा प्वाल परेको हुनुपर्छ ।

2. कुनै पनि वक्र निरन्तर वा विच्छिन्न हुनु भनेको के हो, उदाहरणसहित प्रस्ट पार्नुहोस् ।

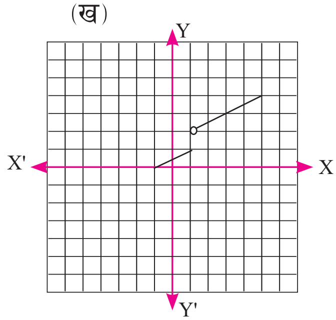
3. कुनै पनि वक्र -5 बाट $+5$ सम्म निरन्तर छ भन्नुको अर्थ के हो, चित्रसहित देखाउनुहोस् ।

4. दिइएका वक्रहरू कुन विन्दुदेखि कुन विन्दुसम्म निरन्तर र कुन विन्दुमा विच्छिन्न छन्, लेख्नुहोस् ।

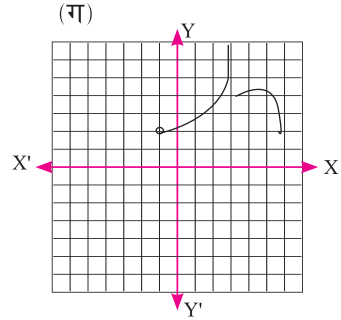
(क)



(ख)



(ग)

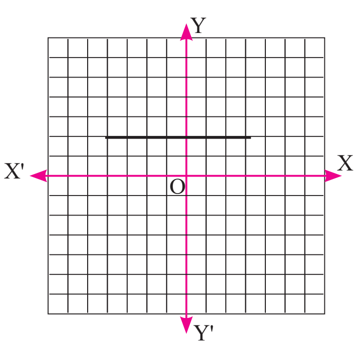


5. एउटा घरको वायरिङ (wiring) प्रणाली तलको अनुसारको छ :

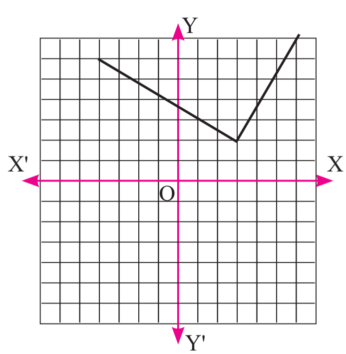
तार A : यो तार सिधा र कतै टुक्रिएको छैन, जसबाट निरन्तर विद्युत् प्रवाह भइरहेको छ ।

तार B : यो तारलाई कोठाको कुनामा 90 डिग्रीको कोणमा तिखो गरी मोडिइएको छ तर तार भित्रबाट चुँडिएको छैन ।

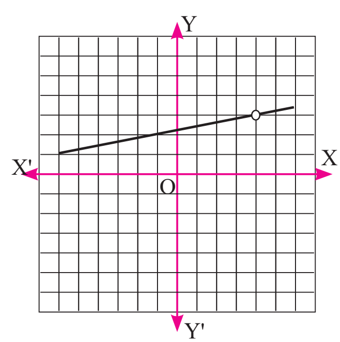
तार C : मुसाले टोकेर वा पुरानो भएर ठ्याक्कै 4 मिटर ($x = 4$) को दुरीमा तार चुँडिएको छ, जसले गर्दा त्यहाँ विद्युत् प्रवाह रोकिएको छ ।



तार A



तार B



तार C

(क) तार A निरन्तर वा विछिन्न के छ, कारण दिनुहोस् ।

(ख) तार B, $x = 3$ मा निरन्तर वा विछिन्न के छ, कारण दिनुहोस् ।

(ग) गणितीय भाषामा तार C मा $x = 4$ मा भएको चुँडिएको भागलाई के भनिन्छ ?

(घ) तार B (तिखो मोड) र तार C (चुँडिएको तार) बिच तुलना गर्नुहोस् । कुन अवस्थामा फलन (विद्युत् प्रवाह) निरन्तर हुन्छ र कुनमा विच्छिन्न हुन्छ ? तार तिखो गरी मोडिँदा पनि किन निरन्तरता भङ्ग हुँदैन ?

उत्तर

1. (क) (b) (ख) (a) (ग) (b) (घ) (c) 2 - 5. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

परियोजना कार्य

आफ्नो टोल अथवा छिमेकमा बस्ने मानिसको उमेर सोधी दिइएको तालिका भर्नुहोस् :

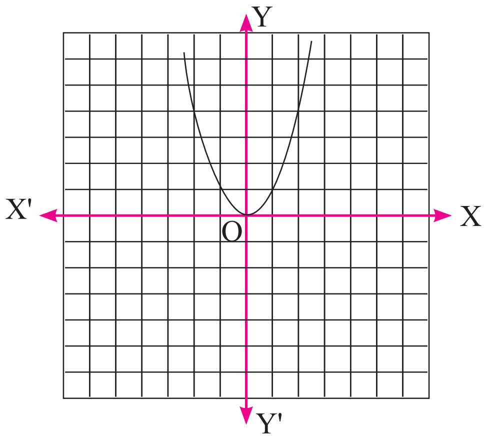
उमेर वर्षमा	0 - 20	20 - 40	40 - 60	60 - 80	80 भन्दा माथि
मानिसको सङ्ख्या	.....	.....	.....	.....	.....

उक्त तथ्याङ्कका आधारमा भन्दा कम र भन्दा बढी सञ्चित बारम्बारता वक्र खिच्नुहोस् । कुनै निश्चित विन्दुमा उक्त वक्रहरूको निरन्तरता र विच्छिन्नताको प्रतिवेदन तयार पारी उक्त प्रतिवेदनलाई कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

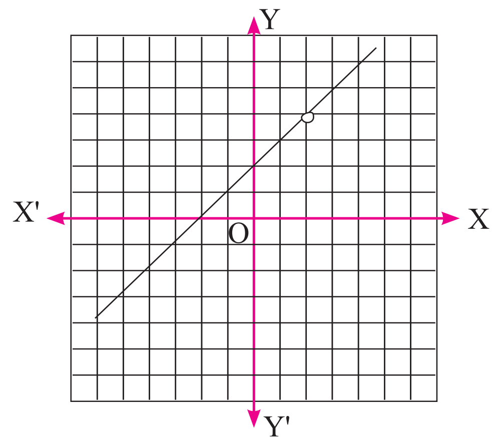
12.2 फलनको निरन्तरता र विच्छिन्नता (Continuity and Discontinuity of a Function)

क्रियाकलाप 1

तलका लेखाचित्रहरू अवलोकन गरी दिइएका प्रश्नहरूमा छलफल गर्नुहोस् :



चित्र न. 1 : $y = x^2$



चित्र न. 2 : $y = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

(क) के चित्र न. 1 को लेखाचित्रमा वक्र कतै टुटेको देखिन्छ ?

(ख) के चित्र न. 2 को लेखाचित्रमा $x = 2$ को स्थानमा रेखा टुटेको छ ?

(ग) यदि $y = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ मा $x = 2$ राख्दा y को मान कति हुन्छ ? यस्तो अवस्थामा (x, y) लाई लेखाचित्रमा देखाउन सकिन्छ ? $y = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ को लेखाचित्रमा $x = 2$ को विन्दुमा रेखा जोडिएको देखिन्छ कि टुक्रिएको, आफ्ना तर्क पेस गर्नुहोस् ।

चित्र न. 1 को लेखाचित्रमा वक्र कतै टुटेको छैन । यहाँ वक्र हरेक विन्दुमा निरन्तर छ । यसको अर्थ वक्र पूरै अन्तरालमा निरन्तर छ । चित्र न. 2 को लेखाचित्रमा $x = 2$ को स्थानमा रेखा टुटेको छ । यसको अर्थ $x = 2$ मा वक्र विच्छिन्नता छ । $x = 2$ बाहेक अरू विन्दुमा वक्र निरन्तर छ ।

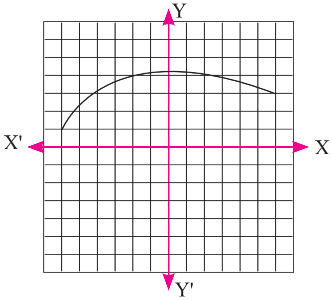
क्रियाकलाप 2

एउटा लोकमार्गको तीन स्थानमा सडकको अवस्था फरक फरक किसिमका छन् :

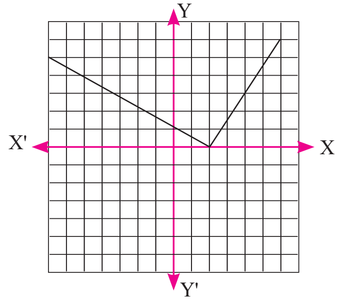
(क) अवस्था A : सडक सुरुदेखि अन्त्यसम्म चिल्लो र कतै नभत्किएको छ ।

(ख) अवस्था B : सडकमा एउटा तिखो "V" आकारको मोड छ, तर सडक कतै टुटेको छैन ।

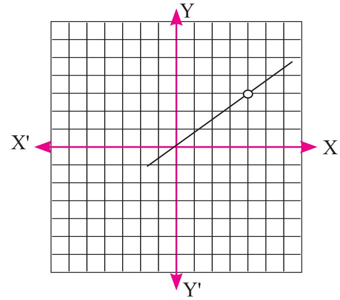
(ग) अवस्था C : भूकम्पका कारण ठिक 4 किलोमिटर $(x = 4)$ को चिह्नमा सडक भासिएको छ, जसले गर्दा त्यहाँ एउटा खाडल बनेको छ ।



अवस्था A



अवस्था B



अवस्था C

माथि दिइएका तीनओटा अवस्थाहरू अध्ययन गरी प्रश्नहरूमा छलफल गर्नुहोस् :

(क) अवस्था A मा कस्तो लेखाचित्र बनेको छ ?

(ख) अवस्था B र अवस्था C बिच तुलना गर्नुहोस् । कुन चाहिँ निरन्तर फलन हो र कुन विच्छिन्न फलन हो, कारणसहित स्पष्ट पार्नुहोस् ।

(ग) एउटा कार अवस्था C सडकमा गुडिरहेको छ । $x = 4$ मा सडक भत्किएको देखाउन तपाईं कस्तो सङ्केत बनाउनुहुन्छ, दिइएका लेखाचित्रहरूका आधारमा व्याख्या गर्नुहोस् ।

(घ) अवस्था C मा यदि निर्माण टोलीले $x = 4$ मा भएको खाडल पुर्न ठिक सडककै सतहमा मिल्ने गरी खाल्डो पुऱ्यो भने, $\lim_{x \to 4} f(x)$ र फलनको मान ($f(4)$) को अवधारणा प्रयोग गरी विश्लेषण गर्नुहोस् ।

अवस्था A मा सडक सुरुदेखि अन्त्यसम्म कतै पनि नटुटी एकनासले अगाडि बढेको छ । यो निरन्तर फलनको उदाहरण हो । अवस्था B मा तिखो मोड छ । यो पनि निरन्तर फलनको उदाहरण हो किनकि यस अवस्थाको सडकमा तिखो 'V' आकारको मोड भए तापनि सडक कतै टुटेको छैन । त्यसैले एउटा गाडी मोडमा पुगेर नरोकिई अगाडि बढ्न सक्छ । अवस्था C मा एउटा खाडल छ । यो विच्छिन्न फलनको उदाहरण हो किनकि यस अवस्थामा विन्दु $x = 4$ मा सडक भासिएर खाडल बनेको छ । यहाँ बाटो टुटेको हुनाले उक्त विन्दुबाट गाडी सिधै अगाडि बढ्न सक्दैन । खाडल पुरियो भने त्यो सडक निरन्तर बन्छ । अवस्था C को लेखाचित्र हेर्दा, जब x को मान 4 को नजिक पुग्दा, सडकको उचाइ $[y = f(x)]$ 3 को नजिक पुग्छ । यस अवस्थाको समस्यालाई तालिका बनाएर सीमान्तमान निकाल्दा x को मान 4 को दायाँ र बायाँबाट नजिकिएर $f(x)$ को मानको प्रकृति अवलोकन गरौं ।

अवस्था	x को मान 4 को नजिक जाँदा	$f(x)$ को मान
बायाँतिरबाट	3.9	2.9
	3.99	2.99
	3.999	2.999
बिचमा	$x = 4$	....

दायाँतिरबाट	4.001	3.001
	4.01	3.01
	4.1	3.1
	3.9	2.9

बायाँ पक्षको सीमान्तमान (LHL) : $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = 3$

दायाँ पक्षको सीमान्तमान (RHL) : $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = 3$

निष्कर्ष : दुबै तिरबाट सडक एउटै उचाइमा आएकाले सीमान्त मानको (Limit) अस्तित्व छ ।

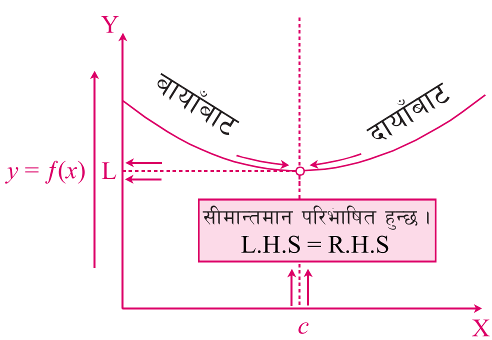
त्यसैले $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = 3$ हुन्छ ।

निर्माण टोलीले ठ्याक्कै सडककै सतहमा मिल्ने गरी खाल्डो पुऱ्यो भनेको, $x = 4$ मा फलनको मान तोक्नु हो । सडकको उचाइ 3 भएकाले, पुराइ पनि 3 उचाइसम्म नै पुग्नुपर्छ । $f(4) = 3$ हुन्छ ।

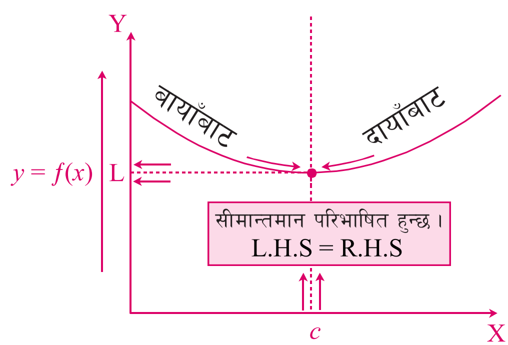
अतः खाडल पुरियो र सडक निरन्तर भयो ।

क्रियाकलाप 3

तलका दुईओटा चित्रहरू अवलोकन गरी गरी प्रश्नहरूमा छलफल गर्नुहोस् :



चित्र क



चित्र ख

(क) के माथिको चित्रहरू क र ख दुबैको विन्दु $x = c$ मा सीमान्तमान परिभाषित हुन्छ ?

(ख) के माथिको चित्रहरू क र ख दुबैको विन्दु $x = c$ मा फलनको मान परिभाषित हुन्छ ?

(ग) माथिको कुन चित्रमा विन्दु $x = c$ मा फलनको मान एवम् सीमान्तमान परिभाषित हुन्छ र तिनिहरू बराबर छन् ?

(घ) माथिको कुन चित्रमा विन्दु $x = c$ मा फलन निरन्तर छन् ?

माथिको चित्रहरू क र ख दुबैको विन्दु $x = c$ मा सीमान्तमानको अस्तित्व देखिन्छ । अर्थात् सीमान्तमान परिभाषित छन् । त्यसैले $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ को अस्तित्व देखिन्छ । माथिको चित्र क मा विन्दु $x = c$ मा

फलनको मानको अस्तित्व देखिँदैन किनकि $x = c$ मा y को मान परिभाषित छैन जसलाई खाली वृत्तले जनाइएको छ । चित्र ख मा विन्दु $x = c$ मा फलनको मानको अस्तित्व देखिन्छ किनकि $x = c$ मा y को मान परिभाषित छ जसलाई गाढा (रङ भरिएको) वृत्तले जनाइएको छ । चित्र ख मा विन्दु $x = c$ मा फलन निरन्तर छ ।

विचारणीय प्रश्न : के सीमान्तमानको अस्तित्व हुँदैमा फलनको मानको अस्तित्व देखिन्छ त ?

माथिको क्रियाकलापबाट निम्नलिखित निष्कर्षमा पुग्न सक्छौँ :

कुनै पनि विन्दु $x = c$ मा फलन निरन्तर हुनका लागि तीनओटा सर्तहरू पूरा गरेको हुनुपर्छ :

1. विन्दु $x = c$ मा सीमान्तमान $\lim_{x \to c} f(x)$ को अस्तित्व हुनुपर्छ ।
2. विन्दु $x = c$ मा फलनको मान $f(c)$ परिभाषित हुनुपर्छ ।
3. सीमान्तमान र फलनको मान एउटै हुनुपर्छ : $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

यदि यी तीनमध्ये कुनै एउटा सर्त पूरा भएन भने त्यो फलन विच्छिन्न हुन्छ ।

उदाहरण 1

$f(x) = x + 1$ एउटा फलन छ ।

(क) $x = 1.9, 1.99, 1.999$ र 1.9999 हुँदा $f(x)$ को मान कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) $x = 2.1, 2.01, 2.001,]$ र 2.0001 हुँदा $f(x)$ को मान कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) $f(2)$ कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(घ) $\lim_{x \to 2^-} f(x)$ र $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ को मान कति कति हुन्छन्, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ङ) के विन्दु $x = 2$ मा $f(x)$ निरन्तर हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

(क) यहाँ, $f(x) = x + 1$ मा x को मान क्रमशः 1.9, 1.99, 1.999 र 1.9999 राख्दा,

$$f(1.9) = 1.9 + 1 = 2.9$$
$$f(1.99) = 1.99 + 1 = 2.99$$
$$f(1.999) = 1.999 + 1 = 2.999$$
$$f(1.9999) = 1.9999 + 1 = 2.9999$$

(ख) यहाँ, $f(x) = x + 1$ मा x को मान क्रमश: 2.1, 2.01, 2.001, र 2.0001 राख्दा

$f(2.1)$	$= 2.1 + 1$	$= 3.1$
$f(2.01)$	$= 2.01 + 1$	$= 3.01$
$f(2.001)$	$= 2.001 + 1$	$= 3.001$
$f(2.0001)$	$= 2.0001 + 1$	$= 3.0001$

(ग) यहाँ, $f(2) = 2 + 1 = 3$

(घ) यहाँ, (क) बाट, $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 3$ र (ख) बाट, $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 3$

(ङ) यहाँ, $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} + f(x) = f(2)$ भएकाले $x = 2$ मा $f(x)$ निरन्तर हुन्छ ।

उदाहरण 2

फलन $f(x) = \begin{Bmatrix} x + 2, & 1 \le x \le 2 \\ 4x - 2, & x \ge 2 \end{Bmatrix}$ छ ।

(क) $x = 1.99$ हुँदा $f(x)$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) $x = 2.01$ हुँदा $f(x)$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ र $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ को मान कति कति हुन्छन्, पत्ता लगाउनुहोस् । के $x = 2$ मा फलन $f(x)$ निरन्तर हुन्छ, कारण दिनुहोस् ।

समाधान

(क) यहाँ, $x = 1.99$ हुँदा फलन $f(x) = x + 2$ हुन्छ ।

अत: $f(1.99) = 1.99 + 2 = 3.99$

(ख) यहाँ, $x = 2.01$ हुँदा फलन $f(x) = 4x + 2$ हुन्छ ।

अत: $f(2.01) = 4 \times 2.01 - 2 = 8.04 - 2 = 6.04$

(ग) यहाँ, (क) बाट, $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 4$ र (ख) बाट, $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 6$

त्यसैले, $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$

अत: $x = 2$ मा $f(x)$ निरन्तर हुँदैन ।

उदाहरण 3

फलन $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ मा x का विभिन्न मानहरू राखी $x = 1$ मा फलनको निरन्तरता वा विच्छिन्नता परीक्षण गर्नुहोस् ।

समाधान

कुनै पनि फलन $f(x)$, विन्दु $x = 1$ मा निरन्तर हुनका लागि $f(1) = \lim\limits_{x \to 1} f(x)$ हुनुपर्छ ।

x को 1 का निकै नजिक (बायाँ र दायाँबाट) का मानहरूलाई $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ मा राख्दा,

x (बायाँबाट)	$f(x)$	x (दायाँबाट)	$f(x)$
0.9	1.9	1.1	2.1
0.99	1.99	1.01	2.01
0.999	1.999	1.001	2.001
0.9999	1.9999	1.0001	2.0001

माथिको तालिकाबाट हामी स्पष्ट देख्न सक्छौँ कि :

x को मान जति जति 1 को नजिक पुग्छ (बायाँ वा दायाँबाट), $f(x)$ को मान 2 को नजिक पुग्छ ।

त्यसैले, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$ हुन्छ ।

$x = 1$ मा फलनको मान $(f(1))$ $= f(1) = \dfrac{1^2 - 1}{1 - 1} = \dfrac{0}{0}$

यो एउटा अनिश्चयको रूप (Indeterminate form) हो । त्यसैले $f(x)$, $x = 1$ मा परिभाषित छैन ।

यहाँ, $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ को अस्तित्व छ र यो 2 सँग बराबर छ । तर, $x = 1$ मा फलनको वास्तविक मान $(f(1))$ परिभाषित छैन ।

अतः $\lim\limits_{x \to 1} f(x) \neq f(1)$ भएको हुनाले, यो फलन विन्दु $x = 1$ मा विच्छिन्न छ ।

उदाहरण 4

फलन $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{x + 3}$ विन्दु $x = -3$ मा निरन्तर छैन भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

समाधान

x को मानहरू प्रयोग गरी सीमान्तमान $\lim\limits_{x \to -3} f(x))$ पत्ता लगाउनका लागि

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x + 3} = \frac{(x - 2)(x + 3)}{x + 3} = x - 2 \quad (x \neq -3 \text{ हुँदा})$$

तालिका : $x \to -3$ हुँदा $f(x)$ को मानहरू

x (बायाँबाट)	$f(x) = x - 2$	x (दायाँबाट)	$f(x) = x - 2$
-3.1	-5.1	-2.9	-4.9
-3.01	-5.01	-2.99	-4.99
-3.001	-5.001	-2.999	-4.999
-3.0001	-5.0001	-2.9999	-4.9999

तालिकाबाट स्पष्ट हुन्छ कि जब $x \to -3$, तब $f(x) \to -5$ । अत: $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = -5$

$x = -3$ मा फलनको मान $(f(-3))$

दिइएको फलन $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{x + 3}$ मा $x = -3$ राख्दा

$$f(-3) = \frac{(3)^2 + (-3) - 6}{-3 + 3}$$

$$f(-3) = \frac{9 - 3 - 6}{0} = \frac{0}{0}$$

यहाँ $\dfrac{0}{0}$ एउटा अनिश्चयको रूप (indeterminate form) हो । तसर्थ फलन $f(x)$ विन्दु $x = -3$ मा परिभाषित छैन ।

यहाँ, $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = -5$ छ तर विन्दु $x = -3$ मा फलन $f(-3)$ परिभाषित छैन । त्यसैले फलन $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{x + 3}$ विन्दु $x = -3$ मा निरन्तर छैन भनी प्रमाणित भयो ।

अभ्यास 12.2

1. दिइएका प्रश्नहरूको उपयुक्त विकल्पमा ठिक चिह्न (✓) लगाउनुहोस् :

(क) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ ले फलनको कस्तो सीमान्तमानलाई जनाउँछ ?

a. दायाँ सीमान्तमान   b. बायाँ सीमान्तमान

c. फलनको मान   d. माथिका कुनै पनि होइनन् ।

(ख) कुनै विन्दु $x = c$ मा फलन $f(x)$ को सीमान्तमान अस्तित्वमा हुन कुन सर्त पूरा हुनुपर्छ ?

a. $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) > \lim\limits_{x \to c^+} f(x)$ b. $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) < \lim\limits_{x \to c^+} f(x)$

c. $\underset{x \to c^-}{im}\ f(x) = \lim\limits_{x \to c^+} f(x)$)   d. $f(c) = 0$

(ग) फलन $f(x) = 3x$ को $x = 1$ मा फलनको मान कति हुन्छ ?

a. 1 b. 3 c. 0 d. 4

(घ) कुनै फलन $f(x)$, विन्दु $x = c$ मा निरन्तर हुनका लागि तलका मध्ये कुन सर्त आवश्यक छ ?

a. $\lim_{x \to c^-} f(x) > \lim_{x \to c^+} f(x)$ b. $\lim_{x \to c^-} f(x) < \lim_{x \to c^+} f(x)$

c. $\lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x) = f(a)$ d. $f(c) = 0$

(ङ) यदि $f(x) = x + 1$ हो भने, $\lim_{x \to 1} \dfrac{1}{f(x)}$ को मान कति हुन्छ ?

a. 0 b. 1 c. $\dfrac{1}{3}$ d. $\dfrac{1}{2}$

2. $\lim_{x \to c^-} f(x)$, र $\lim_{x \to c^+} f(x)$ ले के जनाउँछन्, उदाहरणसहित व्याख्या गर्नुहोस् ।

3. कुनै विन्दु $x = a$ मा फलन $f(x)$ निरन्तर हुनका लागि आवश्यक 3 ओटा सर्तहरू के के हुन् ?

4. यदि फलन $g(x) = x + 3$ भए,

(क) $x = 2.9, 2.99, 2.999$ मा $g(x)$ को मान कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) $x = 3.1, 3.01, 3.001$ मा $g(x)$ को मान कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) $g(3)$ कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(घ) $\lim_{x \to 3^+} g(x)$ र $\lim_{x \to 3^-} g(x)$ को मान कति कति हुन्छन्, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ङ) के विन्दु $x = 3$ मा $g(x)$ निरन्तर हुन्छ, कारण दिनुहोस् ।

5. यदि फलन $h(x) = 2x - 1$ भए,

(क) $x = 0.9, 0.99, 0.999$ मा $h(x)$ को मान कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) $x = 1.1, 1.01, 1.001$ मा $h(x)$ को मान कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) $h(1)$ कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(घ) $\lim_{x \to 1^+} h(x)$ र $\lim_{x \to 1^-} h(x)$ को मान कति कति हुन्छन्, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ङ) के विन्दु $x = 1$ मा $h(x)$ निरन्तर हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

6. एउटा फलन $f(x)$ यस प्रकार छ ।

$$k(x) = \begin{cases} 3 - x, & 0 \le x \le 1 \\ x + 1, & x > 1 \end{cases}$$

(क) $x = 0.99$ हुँदा $k(x)$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) $x = 1.01$ हुँदा $k(x)$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) $\lim_{x \to 1^-} k(x)$ र $\lim_{x \to 1^+} k(x)$ को मान कति कति हुन्छन्, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(घ) के $x = 1$ मा फलन $k(x)$ निरन्तर हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

7. एउटा फलन $f(x)$ यस प्रकार छ :

$$p(x) = \begin{cases} 2x+1, & 1 \leq x \leq 3 \\ x+4, & x > 3 \end{cases}$$

(क) $x = 2.99$ हुँदा $p(x)$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) $x = 3.01$ हुँदा $p(x)$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) $\lim_{x \to 3^-} p(x)$ र $\lim_{x \to 3^+} p(x)$ को मान कति कति हुन्छन्, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(घ) के $x = 3$ मा फलन $p(x)$ निरन्तर हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

8. फलन $f(x)$ मा x का विभिन्न मानहरू राखी फलनको निरन्तरता वा विच्छिन्नता परीक्षण गर्नुहोस् :

(क) $f(x) = 2x + 5, x = 1$ (ख) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}; x = 2$ (ग) $f(x) = \dfrac{x^3 - 27}{x - 3}; x = 3$

9. एउटा फलन $f(x)$ यस प्रकार छ ।

(क) $f(x) = \begin{cases} 7x - 2, & x < 3 \\ 5, & x = 3 \\ 6x + 1, & x > 3 \end{cases}$

$x = 3$ मा फलन $f(x)$ को निरन्तरता परीक्षण गर्नुहोस् ।

(ख) $g(x) = \begin{cases} x + 2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 3, & x > 1 \end{cases}$

$x = 1$ मा फलन $f(x)$ को निरन्तरता परीक्षण गर्नुहोस् ।

10. फलन $f(x)$ यस प्रकार छ ।

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3, & x < 2 \\ 2k - 3, & x = 2 \\ x + k, & x > 2 \end{cases}$$

$x = 2$ मा फलन $f(x)$ निरन्तर हुनका लागि k को मान कति हुनुपर्छ ?

उत्तर

1. (क) (b) (ख) (c) (ग) (b) (घ) (c) (ङ) (d) 2 - 10. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

परियोजना कार्य

तपाईं बस्नुभएको स्थानको कुनै एक दिनको 6 घण्टाको तापक्रम हरेक आधा घण्टाको फरकमा तापक्रम नापी तथ्याङ्क सङ्कलन गर्नुहोस् । उक्त तथ्याङ्कको रेखाचित्र बनाउनुहोस् । सो रेखाचित्रको आधारमा निरन्तरता र विच्छिन्नता आफ्ना साथीलाई कसरी बुझाउनुहुन्छ, सोका बारेमा एउटा प्रतिवेदन तयार पारी कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

मिश्रित अभ्यास - विषयक्षेत्रगत

1. फलन $g(x) = x + 3$ दिइएको छ ।
   (क) कुनै पनि वक्र निश्चित विन्दुमा निरन्तर वा विच्छिन्न हुनु भनेको के हो, उदाहरणसहित प्रस्ट पार्नुहोस् ।
   (ख) वक्र –4 बाट +4 सम्म निरन्तर छ भन्नुको अर्थ के हो, लेख्नुहोस् ।
   (ग) के दिइएको फलन $g(x)$, $x = 3$ मा निरन्तर हुन्छ, कारण दिनुहोस् ।

2. फलन $f(x) = 4x + 1$ परिभाषित छ भने,
   (क) $f(1.999)$ र $f(2.001)$ का मानहरू गणना गर्नुहोस् ।
   (ख) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ र $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ का मानहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।
   (ग) $f(2)$ को मान गणना गर्नुहोस् ।
   (घ) के $x = 2$ मा फलन $f(x)$ निरन्तर हुन्छ, कारण दिनुहोस् ।

3. फलन $p(x) = \begin{cases} x + 5, & x \le 3 \\ 4x - 4, & x > 3 \end{cases}$ दिइएको छ ।
   (क) कुन अवस्थामा कुनै फलन $f(x)$ विन्दु $x = a$ मा निरन्तर हुन्छ, सङ्केतमा लेख्नुहोस् ।
   (ख) $x = 2.9999$ मा $f(x)$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।
   (ग) $x = 3.0001$ मा $f(x)$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।
   (घ) के $x = 3$ मा फलन $f(x)$ निरन्तर छ, कारण दिनुहोस् ।

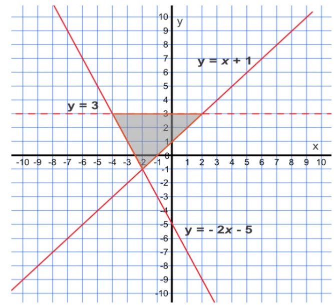
4. एउटा फलन $h(x) = \begin{cases} kx + 3, & x \le 1 \\ 2x - 1, & x > 1 \end{cases}$ दिइएको छ ।
   (क) निरन्तर फलन भनेको के हो ?
   (ख) $\lim\limits_{x \to 1^+} h(x)$ र $\lim\limits_{x \to 1^+}$ का मानहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।
   (ग) यदि फलन $h(x)$, $x = 1$ मा निरन्तर हुन्छ भने k को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

उत्तर

1–5. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

मिश्रित अभ्यास - अन्तर विषयक्षेत्रगत

1. दिइएको लेखाचित्रमा त्रिभुज ABC ले तीनओटा असमानताहरूको हल क्षेत्रलाई जनाउँछ ।



(क) तीनओटै असमानतालाई मान्य हुने मानबाट $4x - 5y$ को अधिकतम र न्यूनतम मान गणना गर्नुहोस् ।

(ख) रेखा BC र AC बिचको अधिककोण पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) यदि फलन $y = f(x) = x + 1$ परिभाषित छ भने, $f(2.999)$ र $f(3.001)$ का मानहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

(घ) के $x = 3$ मा फलन $f(x)$ निरन्तर हुन्छ, कारण दिनुहोस् ।

2. एउटा फलन $f(x) = \begin{cases} 4x + 3 & x \le 2 \\ 5x + 1 & x > 2 \end{cases}$

(क) दिइएको फलन $f(x) = 5x + 1$ हुँदा $f^{-1}(11)$ सम्भव हुन्छ, हुन्छ भने पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) फलन $f(x)$ को $x = 2$ मा निरन्तरता र विच्छिन्नता परीक्षण गर्नुहोस् ।

3. एउटा अविछिन्न श्रेणीको स्तरीय भिन्नता y, स्तरीय भिन्नताको गुणाङ्क $5x - 1$ र मध्यक 10 छन् भने,

(क) स्तरीय भिन्नता y को मान x का रूपमा पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) यदि $y = f(x)$ भए $f^{-1}(2)$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) रेखा $5x - 1$ सँग लम्ब हुने र विन्दु $(2, -3)$ भएर जाने रेखाको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

4. यदि फलन $g(x) = 5x + 2$ परिभाषित छ भने,

(क) $g(2.999)$ र $g(3.001)$ का मानहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) के $x = 3$ मा फलन $g(x)$ निरन्तर हुन्छ, कारण दिनुहोस् ।

(ग) यदि $g(x) = y$ ले जनाउने सीधा रेखासँग समानान्तर हुने र विन्दु $(2, -3)$ भएर जाने रेखाको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

(घ) $g^{-1}(x)$ पत्ता लगाउनुहोस् ।

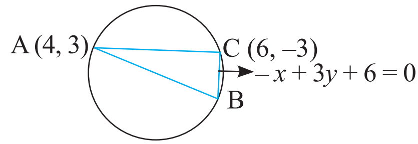
5. दिइएको वर्ग समीकरण $3x^2 + 5x + 2 = 0$ छ ।

(क) समीकरण $3x^2 + 5x + 2 = 0$ लाई लेखाचित्रद्वारा हल गर्नुहोस् ।

(ख) समीकरण $3x^2 + 5x + 2 = 0$ का गुणनखण्डहरू $(3x + 2)$ र $(x + 1)$ लाई क्रमशः $f(x)$ र $g(x)$ ले जनाउनुहोस् । यदि $gof^{-1}(x) = 2$ भए x को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) रेखा $y = 3x + 2$ सँग लम्ब हुने र विन्दु $(-3, -2)$ भएर जाने रेखाको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

6. दिइएको वृत्तमा AC, AB र BC तीन जीवाहरू हुन्, जहाँ A (4, 3) र C (6, –3) छन् । जीवा BC को समीकरण $-x + 3y + 5 = 0$ छ ।



(क) जीवा AC को समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) जीवा AC र जीवा BC बिचको कोण पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) जीवा BC वृत्तको व्यास हो भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

(घ) जीवा AC र BC का समीकरणहरू क्रमशः $y = f(x) = \frac{x-5}{3}$ र $y = g(x) = -3x + 15$ का रूपमा प्रस्तुत गर्दा $gof(2)$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

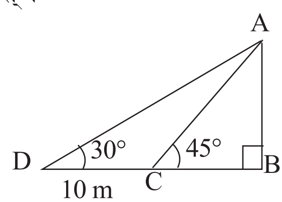
7. त्रिभुज ABC का शीर्षविन्दुहरू क्रमशः A (–4, 6), B (–6, –10) र C (12, –8) छन् । यदि R_1 ले रेखा $y = 0$ मा हुने परावर्तन र R_2 ले $x - y = 0$ मा हुने परावर्तनलाई जनाउँछन् ।

(क) R_1 र R_2 ले प्रतिनिधित्व गर्ने दुई रेखाबिचको न्यूनकोण पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) संयुक्त स्थानान्तरण R_2oR_1 को प्रयोग गरी ΔABC को प्रतिबिम्ब पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) $\overrightarrow{AB}$ र $\overrightarrow{BC}$ को स्केलर गुणनफल कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

8. सँगै दिइएको चित्रमा, AB घरको उचाइ हो । उही समतल सतहमा रहेका विन्दु C र D बाट घरको छतमा हेर्दा बन्ने उन्नतांश कोणहरू क्रमशः 45° र 30° र CD = 10 m छन् ।



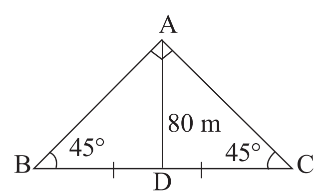
(क) उन्नतांश कोणको परिभाषा लेख्नुहोस् ।

(ख) भुजा AB को लम्बाइ कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) $\overrightarrow{DA}$ र $\overrightarrow{DB}$ को स्केलर गुणनफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

(घ) $\overrightarrow{DA} . \overrightarrow{DB}$ ले बुझाउने ज्यामितीय अर्थ के हो, लेख्नुहोस् ।

9. सँगै दिइएको चित्रमा, AD एउटा टावर हो जसको उचाइ 80 *m* छ । एउटै समतल सतहमा रहेको टावरको विपरीत दिशामा रहेका दुई जना मानिसले विन्दु B र C बाट टावरको टुप्पामा हेर्दा बन्ने दुबै उन्नतांश कोणहरू 45° पाएछन् ।



(क) अवनति कोणको परिभाषा लेख्नुहोस् ।

(ख) दुई जना मानिसबिचको दुरी पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) समकोण त्रिभुज ABC मा कर्णको मध्यविन्दु D प्रत्येक शीर्षविन्दुबाट बराबर दुरीमा हुन्छ भनी भेक्टर विधिबाट प्रमाणित गर्नुहोस् ।

10. त्रिभुज ABC का शीर्षविन्दुका निर्देशाङ्कहरू A(2, 1), B(4, 2) र C(1, 3) छन् ।

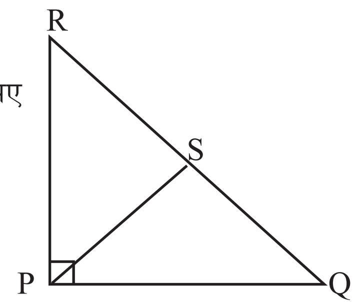
(क) कुनै विन्दुलाई उदगम विन्दुको वरिपरि 90° को परिक्रमण गराउने मेट्रिक्स T पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) T को क्रमपरिवर्तन मेट्रिक्स T^t पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) मेट्रिक्स T^t ले त्रिभुज ABC लाई स्थानान्तरण गर्दा बन्ने प्रतिबिम्बको शीर्षविन्दुका निर्देशाङ्कहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) के मेट्रिक्स T को विपरीत मेट्रिक्स T^{-1} परिभाषित हुन्छ, कारणसहित लेख्नुहोस् ।

11. सँगै दिइएको त्रिभुज PQR का शीर्षविन्दुका निर्देशाङ्कहरू P(5, 1), Q(–4, 1) र R(5, 6) छन् जहाँ, $\angle P = 90°$ र QR को मध्यविन्दु S छ ।



(क) भुजा PQ को झुकाव m_1 र भुजा PR को झुकाव m_2 भए m_1 र m_2 को सम्बन्ध लेख्नुहोस् । ।

(ख) $\overrightarrow{PQ}$ र $\overrightarrow{PR}$ को स्केलर गुणनफल कति हुन्छ ?

(ग) भुजा QR को समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

(घ) विन्दु S त्रिभुज PQR का शीर्षविन्दुहरूबाट समदुरीमा हुन्छ भनी भेक्टर विधिबाट प्रमाणित गर्नुहोस् ।

12. असमानताहरू $3x + 2y + 4 \geq 0$, $3y \leq 6$ र $x \geq 0$ दिइएको छ ।

(क) दिइएका असमानताहरूका सीमा रेखाका समीकरणहरू लेख्नुहोस् ।

(ख) दिइएका असमानताहरूलाई लेखाचित्रमा प्रस्तुत गरी हल क्षेत्र पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) हल क्षेत्र जनाउने बहुभुजको कुनै एउटा कोण पत्ता लगाउनुहोस् ।

(घ) हल क्षेत्र जनाउने बहुभुजलाई मेट्रिक्स $T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ ले स्थानान्तरण गर्दा बन्ने प्रतिबिम्बको शीर्षविन्दुका निर्देशाङ्कहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

13. ΔABC मा A(1, 3), B(5, 7) र C(7, 3) छन् । भुजा BC को मध्यविन्दु D हो ।

(क) विन्दुहरू A र B का स्थिति भेक्टरहरू $\vec{a}$ र $\vec{b}$ भए रेखा AB को मध्यविन्दुको स्थिति भेक्टर कति हुन्छ ?

(ख) विन्दु D को स्थिति भेक्टर पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) स्केलर गुणनफलको प्रयोग गरी $\overrightarrow{AD}$ र $\overrightarrow{BC}$ बिचको कोण पत्ता लगाउनुहोस् ।

(घ) AD को समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

14. विन्दुहरू A, B र C का स्थिति भेक्टरहरू क्रमशः $2\vec{i} + 3\vec{j}$, $6\vec{i} + 7\vec{j}$ र $8\vec{i} + 3\vec{j}$ भए,

(क) विन्दु A बाट BC भुजासम्म खिचिएको मध्यिकाको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) विन्दु A बाट BC भुजासम्म खिचिएको मध्यिका र भुजा BC बिचको कोण पत्ता लगाउनुहोस् ।

15. फलन $f(x) = (x + 2)^2 + 5$ दिइएको छ ।

(क) उक्त फलनले बनाउने लेखाचित्र स्केच गर्नुहोस् ।

(ख) उक्त लेखाचित्र निरन्तर वा अविच्छिन्न कस्तो हुन्छ, कारण दिनुहोस् ।

(ग) के $\lim_{x \to 3^-}$, $\lim_{x \to 3^+}$ र $f(3)$ का मानहरू बराबर हुन्छन्, कारण दिनुहोस् ।

उत्तर

1 (क) Max. value: –3 Min. value: – 31 (ख) 108.43° (ग) 3.999, 4.001 (घ) छ

2. (क) सम्भव छ, $f^{-1}(11) = 2$ (ख) निरन्तरता छ ।

3. (क) $y = 50x – 10$ (ख) $f^{1}(x) = \frac{x + 10}{50}$ (ग) $x + 5y + 13 = 0$

4. (क) 16.995, 17.005 (ख) $y \lim_{x \to 3^-} \lim_{x \to 3^+} f(x) = g(3) = 17$ (ग) $5x – y – 13 = 0$

(घ) $g^{-1}(x) = \frac{x - 2}{5}$

5. (क) $-1, -\frac{1}{2}$ (ख) 5 (ग) $x + 3y + 9 = 0$

6. (क) $3x + y – 15 = 0$ (ख) 90° (ग) शिक्षकलाई देखाउनुहोस् । (घ) $gof(2) = 18$

7. (क) 45° (ख) A' (–6, –4), B'(10, –6), C'(8, 12) (ग) 68

8. (क) शिक्षकलाई देखाउनुहोस् । (ख) 13.66 *m* (ग) 559.80 (घ) शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

9. (क) शिक्षकलाई देखाउनुहोस् । (ख) 160 *m* (ग) शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

10. (क) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (ख) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ (ग) A'(1, –2), B'(2, –4) र C'(3, –1)

(घ) $|T| \neq 0$ भएकाले मेट्रिक्स T को विपरित मेट्रिक्स T^{-1} परिभाषित हुन्छ ।

11. (क) $m_1 \times m_2 = -1$ (ख) $\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{PR} = 0$ (ग) $5x – 9y + 29 = 0$
(घ) शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

12. (क) $3x + 2y + 4 = 0$, $3y = 6$ र $x = 0$ (ख) शिक्षकलाई देखाउनुहोस् । (ग) 90^0

(घ) $A'(8, 10)$, $B'(-8, -10)$ र $C'(\frac{16}{3}, \frac{14}{3})$

13. (क) $\frac{(\vec{a} + \vec{b})}{2}$ (ख) $6\vec{i} + 5\vec{j}$ (ग) $\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{145}}$ (घ) $2x - 5y + 13 = 0$

14. (क) $2x - 5y + 11 = 0$ (ख) $\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{145}}\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{145}}$

15. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।